Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Dieter Hoffmann
Markus Sigg
20.5.2003

3. Übung zur Analysis IV

Die folgenden Aufgaben sind zum Vortragen in den Übungstunden am 28.5.2003 vorzubereiten und, soweit schriftlich bearbeitet, bis zum 26.5.2003 um 10:00 Uhr in die jeweiligen Gruppenbriefkästen einzuwerfen.

(3.1) Sind folgende Aussagen für zwei Filterbasen $\mathbb{F}_1$ und $\mathbb{F}_2$ auf einer Menge $\mathfrak{X}$ immer richtig?

(a) $\mathbb{F}_1 \le \mathbb{F}_2 \ \vee\ \mathbb{F}_2 \le \mathbb{F}_1$

(b) $\mathbb{F}_1 \le \mathbb{F}_2 \ \wedge\ \mathbb{F}_2 \le \mathbb{F}_1 \implies \mathbb{F}_1 = \mathbb{F}_2$

(3.2) $\mathfrak{X}$ sei eine nicht-leere Menge. Zeigen Sie:

(a) Für jede Filterbasis $\mathbb{F}$ auf $\mathfrak{X}$ gilt:

$$\mathbb{F} \text{ Ultrafilter} \iff \forall A \subset \mathfrak{X} \ \left(A \in \mathbb{F} \ \vee\ \widetilde{A} \in \mathbb{F}\right)$$

(b) Für jeden Filter $\mathbb{F}$ auf $\mathfrak{X}$ gilt:

$$\mathbb{F} \text{ Ultrafilter} \iff \forall A, B \subset \mathfrak{X} \ \left(A \cup B \in \mathbb{F} \implies A \in \mathbb{F} \ \vee\ B \in \mathbb{F}\right)$$

(c) Für alle $A \subset \mathfrak{X}$ gilt:

$$\{A\} \text{ Ultrafilterbasis} \iff \#A = 1 \qquad \left([\{x\}] \text{ heißt } \textit{Trivialer Ultrafilter.}\right)$$

(3.3) $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{S}$ seien nicht-leere Mengen und $f : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{S}$. Zeigen Sie:

(a) Für jede Filterbasis $\mathbb{F}$ auf $\mathfrak{S}$ mit $\emptyset \notin f^{-1}(\mathbb{F})$ ist $f^{-1}(\mathbb{F})$ eine Filterbasis auf $\mathfrak{X}$.

(b) In (a) kann „Filterbasis“ nicht durch „Filter“ ersetzt werden.

(c) Für jede Ultrafilterbasis $\mathbb{F}$ auf $\mathfrak{X}$ ist $f(\mathbb{F})$ eine Ultrafilterbasis auf $\mathfrak{S}$.

(d) In (c) kann „Ultrafilterbasis“ nicht durch „Ultrafilter“ ersetzt werden.

(3.4) Es sei $\mathbb{O} := \{\emptyset\} \cup \{O \subset \mathbb{R} : \widetilde{O} \text{ höchstens abzählbar}\}$.

(a) Zeigen Sie, daß $\mathbb{O}$ eine Topologie auf $\mathbb{R}$ ist.

(b) Charakterisieren Sie die bzgl. $\mathbb{O}$ konvergenten Folgen.

(c) Es sei $f : (\mathbb{R}, \mathbb{O}) \to (\mathbb{R}, |\ |)$ die identische Abbildung. Zeigen Sie, daß aus $x_n \to x$ in $\mathbb{O}$ stets $f(x_n) \to f(x)$ bzgl. $|\ |$ folgt, aber f nirgends stetig ist. Die Folgenstetigkeit impliziert also i. a. *nicht* die Stetigkeit.

(Bitte wenden)

(3. 5) Dies ist eine mundgerechtere Fassung der Aufgaben (2.3.c) und (2.3.d).

X, $\mathfrak{F}(X)$ und $U_f^{B,\varepsilon}$ für $f \in \mathfrak{F}(X)$, $\emptyset \neq B \subset X$ und $\varepsilon > 0$ seien wie in Aufgabe (2.3), ebenso die Semimetrik d_B auf $\mathfrak{F}(X)$ für $\emptyset \neq B \subset X$. Nach Aufgabe (2.3.a) gilt

$$g \in U_f^{B,\varepsilon} \iff d_B(f,g) < \varepsilon$$

für alle $f,g \in \mathfrak{F}(X)$ und $\varepsilon \in]0,1[$. Weiter sei $\mathbb{B} \subset \mathbb{P}(X)$ mit $\bigcup_{B\in\mathbb{B}} B = X$. Für $f \in \mathfrak{F}(X)$ sowie $\mathbb{B} \supset \mathbb{B}_0$ endlich und $\varepsilon > 0$ sei

$$U_f^{\mathbb{B}_0,\varepsilon} := \bigcap_{B\in\mathbb{B}_0} U_f^{B,\varepsilon} \quad \text{und damit} \quad \mathbb{U}_f^{\mathbb{B}} := \left\{U_f^{\mathbb{B}_0,\varepsilon} : \mathbb{B} \supset \mathbb{B}_0 \text{ endlich}, \varepsilon > 0\right\}.$$

Nach Aufgabe (2.3.b) ist $\mathbb{U}_f^{\mathbb{B}}$ eine Umgebungsbasis für f, d. h. es ist eine Filterbasis und der davon erzeugte Filter

$$\mathbb{V}_f^{\mathbb{B}} := \left[\mathbb{U}_f^{\mathbb{B}}\right]$$

ein Umgebungssystem für f, d. h. für ihn gelten (U0)–(U4). Gemäß Aufgabe (1.5) gehört dazu die Topologie $\mathbb{O}(\mathbb{B}) := \mathbb{O}(\mathbb{V}^{\mathbb{B}})$, genannt *Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf Mengen aus* $\mathbb{B}$. Für $\mathbb{B}_p := \{\{x\} : x \in X\}$ heißt $\mathbb{O}(\mathbb{B}_p)$ auch *Topologie der punktweisen Konvergenz.*

(a) Zeigen Sie: Für $f, f_n \in \mathfrak{F}(X)$ $(n \in \mathbb{N})$ gilt

$$f_n \longrightarrow f \text{ in } \mathbb{O}(\mathbb{B}_p) \iff \forall x \in X \quad f_n(x) \longrightarrow f(x)$$

(b) $\mathbb{F}$ sei eine Filterbasis auf $\mathfrak{F}(X)$. Definieren Sie $\mathbb{F}(x)$ für $x \in X$ auf naheliegende Weise und zeigen Sie, daß $\mathbb{F}(x)$ eine Filterbasis auf $\mathbb{K}$ ist und daß gilt:

$$\mathbb{F} \longrightarrow f \text{ in } \mathbb{O}(\mathbb{B}_p) \iff \forall x \in X \quad \mathbb{F}(x) \longrightarrow f(x)$$

Erklären Sie, wie man aus dieser Aussage die Aussage aus Teil (a) erhalten kann.

(c) X sei überabzählbar und $A := \{\chi_{\tilde{T}} : X \supset T \text{ endlich}\}$. Zeigen Sie: $0 \in \dot{A}$, aber es gibt keine Folge (f_n) in A mit $f_n \to 0$ in $\mathbb{O}(\mathbb{B}_p)$. Insbesondere ist $\mathbb{O}(\mathbb{B}_p)$ nicht metrisierbar.

(d) Zeigen Sie: Ist $\mathbb{B}$ höchstens abzählbar, also $\mathbb{B} = \{B_n : n \in I\}$ mit $B_n \subset X$ für $n \in I$, wobei $I = \mathbb{N}$ oder $I = \{1, \ldots, M\}$ für ein $M \in \mathbb{N}$, so wird durch

$$d_{\mathbb{B}}(f,g) := \sum_{n\in I} \frac{1}{2^n} d_{B_n}(f,g) \qquad (f,g \in \mathfrak{F}(X))$$

eine Metrik auf $\mathfrak{F}(X)$ definiert, die die Topologie $\mathbb{O}(\mathbb{B})$ erzeugt, d. h. $\mathbb{O}(\mathbb{B})$ ist metrisierbar.