Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Dieter Hoffmann
Markus Sigg
3.6.2003

5. Übung zur Analysis IV

Die folgenden Aufgaben sind zum Vortragen in den Übungstunden am 11.6.2003 vorzubereiten und, soweit schriftlich bearbeitet, bis zum 10.6.2003 um 10:00 Uhr in die jeweiligen Gruppenbriefkästen einzuwerfen.

(5. 1) Wir versehen $C := C([0,1],\mathbb{R})$ mit der üblichen Norm $\|\ \|_\infty$. Für $f \in C$ und $n \in \mathbb{N}$ sei

$$(B_n f)(x) := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\tfrac{k}{n}\right) \qquad (x \in [0,1])$$

das *n-te Bernstein-Polynom zu* f. Des weiteren sei für $\eta > 0$

$$\omega(f,\eta) := \sup\{|f(x) - f(y)| : x,y \in [0,1]\ ,\ |x-y| \le \eta\}$$

der *Stetigkeitsmodul von* f. Zeigen Sie:

(a) Für die durch $P_k(x) := x^k$ für $x \in [0,1]$ und $k = 0,1,2$ gegebenen Polynome gilt

$$B_nP_0 = P_0 \quad , \quad B_nP_1 = P_1 \quad , \quad B_nP_2 = \tfrac{1}{n} P_1 + \tfrac{n-1}{n} P_2$$

und damit $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 = \frac{1}{n} x (1-x)$.

(b) Für jedes $f \in C$ gilt $\|B_n f - f\|_\infty \le \omega\left(f, \frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right) + \frac{\|f\|_\infty}{2\sqrt{n}}$. [1]

(c) *Satz von Weierstraß*:
Für $-\infty < a < b < \infty$ liegt die Menge der Polynome auf $[a,b]$ dicht in $\big(C([a,b],\mathbb{R}), \|\ \|_\infty\big)$.

(d) Das auf den Bernstein-Polynomen beruhende Approximationsverfahren konvergiert selbst für sehr ‚schöne' Funktionen nur langsam: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\|B_nP_2 - P_2\|_\infty = \frac{1}{4n}$.

(5. 2) Es sei (a_n) eine Cauchy-Folge in einem semimetrischen Raum $(\mathfrak{R},\delta)$. Zeigen Sie:

(a) Besitzt (a_n) eine konvergente Teilfolge, so konvergiert (a_n) gegen den gleichen Grenzwert.

(b) Es gibt eine Teilfolge (b_k) von (a_n) mit $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \delta(b_k, b_{k+1}) < \infty$.

Die umstehende Aufgabe sieht zwar nach viel Arbeit aus, die einzelnen Teilaufgaben sind aber recht einfach.

(Bitte wenden)

[1] Tip: $f(x) - (B_n f)(x) = \sum_k \ldots$ aufspalten in den Teil mit $\left|\frac{k}{n} - x\right| \le \frac{1}{\sqrt[4]{n}}$ und den Teil mit $\ldots > \ldots$.

(5.3) Es sei $(\mathfrak{R},\delta)$ ein vollständiger metrischer Raum und $\mathbb{H}(\mathfrak{R})$ die Menge der nicht-leeren kompakten Teilmengen von $\mathfrak{R}$, genannt *Hausdorff-Raum zu* $\mathfrak{R}$. Es seien

$$\begin{aligned}
\delta(x,B) &:= \inf\{\delta(x,y) : y \in B\} && \text{für } x \in \mathfrak{R},\ B \in \mathbb{H}(\mathfrak{R})\ , \\
\delta(A,B) &:= \sup\{\delta(x,B) : x \in A\} && \text{für } A,B \in \mathbb{H}(\mathfrak{R}) \qquad \text{und} \\
h(A,B) &:= \delta(A,B) \vee \delta(B,A) && \text{für } A,B \in \mathbb{H}(\mathfrak{R})\ .
\end{aligned}$$

(a) Veranschaulichen Sie sich diese Definitionen, und geben Sie eine einfache Darstellung von $h(A,B)$ für zwei beliebige kompakte reelle Intervalle $A = [a_1,a_2]$ und $B = [b_1,b_2]$ an.

Zeigen Sie:

(b) Für alle $x \in \mathfrak{R}$ und $B \in \mathbb{H}(\mathfrak{R})$ gibt es ein $y \in B$ mit $\delta(x,B) = \delta(x,y)$, d. h. in der Definition von $\delta(x,B)$ kann man „inf“ durch „min“ ersetzen.
Für alle $A,B \in \mathbb{H}(\mathfrak{R})$ gibt es ein $x \in A$ mit $\delta(A,B) = \delta(x,B)$, d. h. in der Definition von $\delta(A,B)$ kann man „sup“ durch „max“ ersetzen.

(c) Für alle $A,B \in \mathbb{H}(\mathfrak{R})$ gibt es ein $x \in A$ und ein $y \in B$ mit $\delta(A,B) = \delta(x,y)$.
Für alle $A,B \in \mathbb{H}(\mathfrak{R})$ gibt es ein $x \in A$ und ein $y \in B$ mit $h(A,B) = \delta(x,y)$.

(d) Für $A,B \in \mathbb{H}(\mathfrak{R})$ gilt i. a. *nicht* $\delta(A,B) = \delta(B,A)$, d. h. δ ist i. a. *keine* Metrik auf $\mathbb{H}(\mathfrak{R})$.

(e) h ist eine Metrik auf $\mathbb{H}(\mathfrak{R})$. (*Hausdorff-Metrik*; $h(A,B)$: *Hausdorff-Abstand* von A,B.)

(f) Für alle $A,B \in \mathbb{H}(\mathfrak{R})$ und $\alpha \geq 0$ gilt

$$\begin{aligned}
d(A,B) \leq \alpha &\iff A \subset B_\alpha \qquad \text{und} \\
h(A,B) \leq \alpha &\iff A \subset B_\alpha \wedge B \subset A_\alpha
\end{aligned}$$

mit der Definition $M_\alpha := \bigcup_{x \in M} K_x^\alpha$ für $M \subset \mathfrak{R}$.

Damit kann man zeigen, daß $(\mathbb{H}(\mathfrak{R}),h)$ vollständig ist. Für eine Cauchy-Folge (A_n) in $\mathbb{H}(\mathfrak{R})$ gilt:

$$A_n \longrightarrow \{x \in \mathfrak{R} : \exists x_k \in A_k\ (k \in \mathbb{N}),\ x_k \to x\}$$

Der Beweis ist nicht zu schwierig, aber leider zu umfangreich für diese Übung.

Zeigen Sie:

(g) Ist $T : \mathfrak{R} \to \mathfrak{R}$ eine Kontraktion, so wird durch durch $\widehat{T}(A) := \{T(x) : x \in A\}$ für $A \in \mathbb{H}(\mathfrak{R})$ eine Kontraktion $\widehat{T} : \mathbb{H}(\mathfrak{R}) \to \mathbb{H}(\mathfrak{R})$ mit gleicher Lipschitz-Konstante definiert.

(h) Für alle $A,B,C \in \mathbb{H}(\mathfrak{R})$ gilt $d(A \cup B, C) = d(A,C) \vee d(B,C)$.
Für alle $B,C,D,E \in \mathbb{H}(\mathfrak{R})$ gilt $h(B \cup C, D \cup E) \leq h(B,D) \vee h(C,E)$.

(i) Sind $S_1,\dots,S_n : \mathbb{H}(\mathfrak{R}) \to \mathbb{H}(\mathfrak{R})$ Kontraktionen mit Lipschitz-Konstanten $P_1,\dots,P_n$, und definiert man $\bigcup_{i=1}^n S_i : \mathbb{H}(\mathfrak{R}) \to \mathbb{H}(\mathfrak{R})$ durch $(\bigcup_{i=1}^n S_i)(A) := \bigcup_{i=1}^n S_i(A)$, dann ist $\bigcup_{i=1}^n S_i$ eine Kontraktion mit Lipschitz-Konstante $\max(P_1,\dots,P_n)$.

Zu Kontraktionen $T_1,\dots,T_n$ auf $\mathfrak{R}$ gehören auf diese Weise also Kontraktionen $\widehat{T_1},\dots,\widehat{T_n}$ auf $\mathbb{H}(\mathfrak{R})$ und damit eine Kontraktion $\bigcup_{i=1}^n \widehat{T_i}$ auf $\mathbb{H}(\mathfrak{R})$. Nach dem Fixpunktsatz für Kontraktionen (9.1 der Vorlesung) hat diese genau einen Fixpunkt A in $\mathbb{H}(\mathfrak{R})$. A heißt *Attraktor* des *iterierten Funktionensystems* (IFS) $T_1,\dots,T_n$. Diese Zusammenhänge sind Grundlage von Verfahren zur fraktalen Kompression. Die Aufgabe ist dann, zu einer gegebenen Menge $A \subset \mathfrak{R}$ Kontraktionen $T_1,\dots,T_n$ auf $\mathfrak{R}$ zu finden, für die der Attraktor des IFS gerade A ist oder ‚nahe‘ (etwa bzgl. der Hausdorff-Metrik) an A liegt. Für $T_1,\dots,T_n$ beschränkt man sich auf Abbildungen einer bestimmten Art (etwa affine Transformationen), die sich durch wenige Parameter angeben lassen, und versucht natürlich, n klein zu halten. Der Parametersatz zu $T_1,\dots,T_n$ ist eine (i. a. verlustbehaftete) komprimierte Darstellung von B.