Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Dieter Hoffmann
Markus Sigg
10.6.2003

6. Übung zur Analysis IV

Die folgenden Aufgaben sind zum Vortragen in den Übungstunden am 18.6.2003 vorzubereiten und, soweit schriftlich bearbeitet, bis zum 17.6.2003 um 10:00 Uhr in die jeweiligen Gruppenbriefkästen einzuwerfen.

(6. 1) Zeigen Sie: Ist $\mathfrak{X}$ ein abzählbar kompakter topologischer Raum und $f : \mathfrak{X} \to \mathbb{R}$ stetig, so gibt es $a, b \in \mathfrak{X}$ derart, daß $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ gilt für alle $x \in \mathfrak{X}$.

(6. 2) Zeigen Sie: Im $\mathbb{R}^n$ ist Totalbeschränktheit äquivalent zu Beschränktheit.

(6. 3) Zeigen Sie: Jeder NVR $(X, \|\ \|)$, in dem K_0^1 totalbeschränkt ist, ist endlichdimensional. [1]

(6. 4) Es seien $(\mathfrak{X}_i)_{i \in I}$ eine Familie topologischer Räume, $\mathfrak{X} := \prod_{i \in I} \mathfrak{X}_i$ und $p_i : \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}_i$ für $i \in I$ die Projektion von $\mathfrak{X}$ auf $\mathfrak{X}_i$. Zeigen Sie für alle Filterbasen $\mathbb{F}$ auf $\mathfrak{X}$ und $x \in \mathfrak{X}$:

$$\mathbb{F} \longrightarrow x \iff \forall\, i \in I \ \ p_i(\mathbb{F}) \longrightarrow p_i(x)$$

(6. 5) *Satz von Dini*: Es seien $(\mathfrak{X}, \mathbb{O})$ ein abzählbar kompakter topologischer Raum und $f_n : \mathfrak{X} \to \mathbb{R}$ stetig für $n \in \mathbb{N}$ mit $f_n(x) \downarrow 0$ für alle $x \in \mathfrak{X}$. Zeigen Sie, daß dann sogar $\| f_n \|_\infty \to 0$ gilt.

---

[1] Tip: Es sei M eine endliche Teilmenge von $B := K_0^1$ mit $B \subset \bigcup_{a \in M} U_a^{\frac{1}{2}}$ und L die lineare Hülle von M.
Dann gilt $d(x, L) \leq \frac{1}{2} \|x\|$ für alle $x \in X$.
Folgern Sie hieraus, daß es zu jedem $x \in X$ eine Folge (x_n) in L gibt mit $\|x_n - x\| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n \|x\|$.