Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Dieter Hoffmann
Markus Sigg
17.6.2003

7. Übung zur Analysis IV

Die folgenden Aufgaben sind zum Vortragen in den Übungstunden am 25.6.2003 vorzubereiten und, soweit schriftlich bearbeitet, bis zum 23.6.2003 um 15:00 Uhr in die jeweiligen Gruppenbriefkästen einzuwerfen.

(7.1) Zeigen Sie für folgende Teilmengen von $\mathbb{R}^2$:

(a) $(\mathbb{R}\times\mathbb{Q})\cup(\{0\}\times\mathbb{R})$ ist zusammenhängend, aber nicht lokal-zusammenhängend.

(b) $\mathbb{R}\times\{0,1\}$ ist lokal-zusammenhängend, aber nicht zusammenhängend.

Eine Teilmenge M eines topologischen Raums heißt genau dann *wegzusammenhängend*, wenn es zu allen $x,y\in M$ ein stetiges $f\colon [0,1]\longrightarrow M$ gibt mit $f(0)=x$ und $f(1)=y$. Zeigen Sie:

(c) Der Abschluß einer wegzusammenhängenden Menge ist i. a. nicht wegzusammenhängend. [1]

(d) Jede wegzusammenhängende Menge ist zusammenhängend. [2]

(e) Nicht jede zusammenhängende Menge ist wegzusammenhängend. [3]

(7.2) Man kann auf jedem reellen oder komplexen Vektorraum eine Norm definieren. [4]

(7.3) Zeigen Sie: Ist A irgendeine und B eine zusammenhängende Teilmenge eines topologischen Raums mit $A\cap B\neq\emptyset$ und $\widetilde{A}\cap B\neq\emptyset$, dann gilt auch $\partial A\cap B\neq\emptyset$. Ist die Zusammenhangsvoraussetzung notwendig?

(7.4) Es sei A eine reelle $n\times n$-Matrix.

(a) Bestimmen Sie $\|A\|_1$.

(b) Zeigen Sie, daß $\|A\|_2^2$ gerade das Maximum aller Eigenwerte von A^*A ist. [5]

---

[1] Tip: Übung 2.1.
[2] Tip: 14.3 und 14.4 der Vorlesung.
[3] Tip: Aufgabenteil (c) und 14.2 der Vorlesung.
[4] Tip: Benutzen Sie, daß jeder Vektorraum X eine Basis B besitzt, also eine Teilmenge $B\subset X$ derart, daß sich jedes $x\in X$ eindeutig als Linearkombination endlich vieler Elemente von B schreiben läßt.
[5] Tip: Maximieren Sie $\langle Ax,Ax\rangle$ unter der Nebenbedingung $\|x\|_2=1$.