Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Dieter Hoffmann
Markus Sigg
24.6.2003

8. Übung zur Analysis IV

Die folgenden Aufgaben sind zum Vortragen in den Übungstunden am 2.7.2003 vorzubereiten und, soweit schriftlich bearbeitet, bis zum 30.6.2003 um 15:00 Uhr in die jeweiligen Gruppenbriefkästen einzuwerfen.

(8. 1) Es seien $\mathfrak{R}$ ein topologischer Raum und (α_n) eine Folge in $\mathfrak{R}$ mit $\alpha_n \to a \in \mathfrak{R}$. Zeigen Sie, daß $A := \{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{a\}$ kompakt ist.

(8. 2) Es sei M ein endlich-dimensionaler Unterraum eines NVRs X. Zeigen sie, daß es zu jedem $x \in X$ ein $m \in M$ (*beste Approximation von x in M*) gibt mit $\|x - m\| = d(x, M)$. [1]

Mit dieser Aussage läßt sich der zu Aufgabe 6.3 vorgeschlagene Beweis verkürzen: Man will ja $x \in L$ zeigen für alle $x \in X$. Nachdem man $d(x, L) \le \frac{1}{2}\|x\|$ für alle $x \in X$ bewiesen hat, nimmt man ein $y \in L$ mit $\|x - y\| = d(x, L)$ und dann ein $z \in L$ mit $\|x - y - z\| \le \frac{1}{2}\|x - y\|$. Wegen $y + z \in L$ folgt $\|x - y\| \le \|x - y - z\| \le \frac{1}{2}\|x - y\|$, also $x = y \in L$.

(8. 3) Es seien $\mathfrak{S}$ ein topologischer Raum und $f : \mathbb{R} \to \mathfrak{S}$. Zeigen Sie:

(a) Die Funktion f ist genau dann stetig, wenn ihr Graph $\Gamma(f) := \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\}$ im Produktraum $\mathbb{R} \times \mathfrak{S}$ wegzusammenhängend ist. [2]

(b) Hingegen folgt aus dem Zusammenhang von $\Gamma(f)$ i. a. *nicht* die Stetigkeit von f.

(8. 4) Zeigen Sie, daß folgende Aussagen für jeden normierten Vektorraum E äquivalent sind:

(a) E ist separabel.

(b) Es gibt einen dichten Unterraum von E mit höchstens abzählbarer Basis.

(c) Es gibt eine dichte Vereinigung abzählbar vieler endlich-dimensionaler Unterräume von E.

(8. 5) Ist E ein Vektorraum mit Basis B, dann gibt es zu jedem $x \in E$ eindeutige Skalare $c_x(b)$ für $b \in B$, von denen nur endlich viele verschieden von Null sind, mit $x = \sum_{b \in B} c_x(b)\, b$. In der Besprechung zu Aufgabe 7.2 wurde gezeigt, daß $\|x\|_B := \max_{b \in B} |c_x(b)|$ eine Norm $\|\ \|_B$ auf E definiert. Beweisen Sie, daß $(E, \|\ \|_B)$ genau dann vollständig ist, wenn E endlich-dimensional ist.

[1] Tip: Geht mit einer Kompaktheitsüberlegung ganz einfach.

[2] Umgangssprachlich: Eine Funktion (auf $\mathbb{R}$) ist genau dann stetig, wenn man ihren Graphen ohne abzusetzen zeichnen kann.