Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Dieter Hoffmann
Markus Sigg
1.7.2003

9. Übung zur Analysis IV

Die folgenden Aufgaben sind zum Vortragen in den Übungstunden am 9.7.2003 vorzubereiten und, soweit schriftlich bearbeitet, bis zum 7.7.2003 um 15:00 Uhr in die jeweiligen Gruppenbriefkästen einzuwerfen.

(9. 1) Wir setzen Aufgabe (8.2) fort.

(a) Geben Sie ein Beispiel an, das zeigt, daß das minimierende m i. a. nicht eindeutig ist.

(b) Die Norm auf X heißt genau dann *strikt konvex*, wenn mit $S := \{x \in X : \|x\| = 1\}$

$$\forall x,y \in S \ \left(\tfrac{1}{2}(x+y) \in S \implies x = y\right)$$

gilt. Zeigen Sie, daß dann das minimierende m eindeutig ist.

(c) Für welche $p \in [1,\infty]$ ist $\| \ \|_p$ strikt konvex?

(9. 2) Für $n \in \mathbb{N}$ sei P_n der Raum der Polynome mit reellen Koeffizienten vom Grad höchstens n. Beweisen Sie das *Minimaxtheorem von Borel-Tschebyscheff*: Zu jeder stetigen reellen Funktion f auf einem kompakten Intervall und jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $p_0 \in P_n$, das $\|f - p\|_\infty$ für $p \in P_n$ minimiert. Erläutern Sie den Namen „Minimaxtheorem“.

(9. 3) Es sei E ein normierter Vektorraum.

(a) Zeigen Sie, daß für alle Unterräume M von E folgende Aussagen äquivalent sind:

$$(1)\ \overset{\circ}{M} \neq \emptyset \qquad (2)\ M \text{ ist offen} \qquad (3)\ M = E$$

(b) Es sei F ein weiterer normierter Vektorraum. Zeigen Sie, daß jede offene lineare Abbildung $T : E \to F$ surjektiv ist.

(c) Zeigen Sie, daß für alle $f \in E^*$ folgende Aussagen äquivalent sind:

$$(1)\ f \neq 0 \qquad (2)\ f \text{ ist offen} \qquad (3)\ f \text{ ist surjektiv}$$

(9. 4) Zeigen Sie: Ist E' für einen normierten Vektorraum E separabel, so ist auch E selbst separabel.[1][2]

(9. 5) Es seien E ein normierter Vektorraum, $M \subset E$ und $x \in E$. Zeigen Sie folgendes Approximationskriterium: [3]

$$x \in \overline{\langle M \rangle} \iff \forall f \in E' \ \left(f_{/M} = 0 \implies f(x) = 0\right)$$

[1] Tip: Dicht in der Einheitskugeloberfläche in E' liegende f_n nehmen und dazu normierte $x_n \in E$ mit $|f_n(x_n)| > \frac{1}{2}$. Eine geeignete Folgerung aus dem Satz von Hahn-Banach auf $\langle x_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ anwenden und Übung 8.4 benutzen.

[2] Die Umkehrung hiervon gilt übrigens nicht. Dazu vielleicht mehr im nächsten Blatt.

[3] Tip: Noch mal Hahn-Banach.