Kapitel 1

Einführende Überlegungen

Die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen ist eine der mathematischen Disziplinen, in denen die Anwendbarkeit der Mathematik besonders augenfällig zutage tritt.

Die Bedeutung der wechselseitigen Beziehungen zwischen der Theorie der Differentialgleichungen und den Naturwissenschaften, oder — allgemeiner — Wissenschaften, die die Erfahrung auf einer höheren Ebene als der rein beschreibenden interpretieren, kann nur schwerlich überschätzt werden.

Die Theorie steht in andauerndem fruchtbaren Kontakt zu diesen Wissenschaften, wobei diese einerseits wertvolle Hilfe durch die Theorie der Differentialgleichungen erfahren, andererseits die Theorie immer wieder mit konkreten Fragestellungen neu beleben und fordern.

Dadurch ist dieses Gebiet weniger als manch andere Bereiche in der Mathematik ausschließlich seiner Eigendynamik gefolgt und weniger in Gefahr, durch ‚mathematische Inzucht' in Richtung „l'art pour l'art" zu degenerieren.

Um einen Eindruck von dem faszinierenden Anwendungsreichtum der Differentialgleichungen zu geben, haben wir einige Beispiele zusammengestellt, die aufzeigen, wie Forscher verschiedenster Gebiete Differentialgleichungen zur Lösung oder als einen Lösungsversuch auch von ‚real life'-Problemen mitbenutzen:

Schon der ganz einfache Fall $y' = a\,y$ (Änderung ist proportional zum Ist-Zustand) erfaßt so verschiedenartige Dinge wie z. B.:

Radioaktiver Zerfall	[Zac]
Anfängliche Entwicklung einer Bakterienkultur	[Ma/Mu]
Blutkonzentration eines Pharmakons nach intravenöser Injektion	[Fuc]
Barometrische Höhenformel	[Hai]

Zellwachstum[1] [Bat]
Stetige Verzinsung [Hof]

Man vergleiche hierzu insbesondere auch [Heu] und [Bra].

$$ay'' + by' + cy = f(x)$$

$b = 0, f = 0$: HOOKEsches Gesetz [Col]
Schwingendes Federpendel [Hof]
Schwingungen von Atomen und Molekülen [Zac]
Elektromagnetische Schwingkreise $\left(L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{Q}{C} = U_0 \cos \omega t\right)$ [Me]
Elektrische Polarisation [Ma/Mu]
Modell zur Diabetes-Aufdeckung (GTT) [Bra]

$$\begin{aligned} y_1' &= -\alpha_1 y_1 \\ y_2' &= \alpha_1 y_1 - \alpha_2 y_2 \end{aligned}$$

Radioaktiver Zerfall von Mutter- und Tochtersubstanz [Ma/Mu]
Futterdurchgang durch Wiederkäuermagen [Bat]

$$\begin{aligned} y_1' &= a y_1 - b y_1 y_2 \\ y_2' &= c y_1 y_2 - d y_2 \end{aligned}$$

(kontinuierliches) Räuber-Beute-Modell [Had]
Verwendung von Insektenvernichtungsmitteln [Bra]
Zwei Parteien, die unabhängig voneinander existieren können, treten in Konkurrenz und schädigen sich gegenseitig. [Kn/Ka]

$$y' = k(a - y)(b - y)$$

Chemische Reaktion, bei der sich Stoffe A und B zum Stoff C ($\widehat{=}\, y$) zusammensetzen. [Zac]

$$\begin{aligned} y_1' &= -a y_1 y_2 \\ y_2' &= a y_1 y_2 - b y_2 \\ y_3' &= b y_2 \end{aligned}$$

Epidemie-Verlauf (y_1 anfällig, y_2 infiziert, y_3 isoliert, immun oder tot) [Def]

$$\begin{aligned} y_1'' &= y_1 + 2y_2' - \mu' \frac{y_1 + \mu}{[(y_1 + \mu)^2 + y_2^2]^{\frac{2}{3}}} - \mu \frac{y_1 - \mu'}{[(y_1 - \mu')^2 + y_2^2]^{\frac{2}{3}}} \\ y_2'' &= y_2 - 2y_1' - \mu' \frac{y_2}{[(y_1 + \mu)^2 + y_2^2]^{\frac{2}{3}}} - \mu \frac{y_2}{[(y_1 - \mu')^2 + y_2^2]^{\frac{2}{3}}} \end{aligned}$$

Bewegung eines Satelliten im Kraftfeld von Erde und Mond (unter vereinfachenden Annahmen) [Bu/St]

[1] bis zu einer gewissen Größe, dann Zellteilung

Kapitel 1

1.1 Erste Aspekte

Was ist eine Differentialgleichung?

Es seien $k \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}^{k+1}$ und $F\colon \mathfrak{D} \longrightarrow \mathbb{C}$. Dann heißt

$$F\big(x, y, y', \dots, y^{(k)}\big) = 0 \qquad (*)$$

„gewöhnliche Differentialgleichung", kurz *„DGL"*. *Genauer* bedeutet dies:

Gesucht sind ein Intervall[2] $J \subset \mathbb{R}$ und eine k-mal differenzierbare Funktion $y\colon J \longrightarrow \mathbb{C}$ mit:

$$\big(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(k)}(x)\big) \in \mathfrak{D} \quad \text{und}$$

$$F\big(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(k)}(x)\big) = 0 \quad \text{für alle } x \in J\,.$$

y heißt dann *„Lösung"* von $(*)$ (in J), in älterer Literatur auch *„Integral"*. Man sagt auch „*y erfüllt die DGL*" oder „*y genügt der DGL*".

Das Argument läßt man in der Notierung meistens — wie in $(*)$ — weg.

Hängt $F\big(t_1, \dots, t_{k+2}\big)$ in $\mathfrak{D}$ ‚effektiv' vom $(k+2)$-ten Argument ab, so wird k als *„Ordnung"* der DGL $(*)$ bezeichnet.

Wir beschränken uns weitgehend auf den *„expliziten"* Fall, d. h. die DGL ist nach der höchsten Ableitung der gesuchten Funktion aufgelöst, hat also — mit einer geeigneten Funktion f — die Form:

$$y^{(k)} = f\big(x, y, \dots, y^{(k-1)}\big)$$

Sonst sprechen wir von *„impliziten"* DGLen.

Bei einer *gewöhnlichen* Differentialgleichung ist eine Funktion *einer* Variablen gesucht; anders als bei *partiellen* Differentialgleichungen, bei denen die gesuchte Funktion von mehreren Variablen abhängt.

In den folgenden Vorüberlegungen beschränken wir uns auf den einfachen Fall einer *expliziten DGL 1. Ordnung*

$$y' = f(x, y) \qquad \big(\mathfrak{D} \subset \mathbb{R}^2, f\colon \mathfrak{D} \longrightarrow \mathbb{R}\big)\,.$$

[2] Ein *„Intervall"* sei im folgenden immer ein *echtes* Intervall, d. h. eine nicht-leere, nicht-einpunktige zusammenhängende — möglicherweise unbeschränkte — Teilmenge von $\mathbb{R}$.

Welche Fragen stellen wir?

Es stellen sich sofort zumindest die folgenden *zentralen Fragen*:

1) Existiert (lokal) eine Lösung?

2) Falls ja: Wie gewinnt man eine Lösung?

3) Falls ja: Eindeutigkeit? (bei gegebenem *„Anfangswert“* $(a, b) \in \mathfrak{D}$)[3]

4) Maximale Lösung (Existenzintervalle): Fortsetzung (von Lösungen)

5) Abhängigkeit der Lösung(en) von ‚Parametern‘

6) Charakterisierung der Lösung(en)

7) Qualitatives Verhalten

Erste Anmerkungen dazu:

Zu 1), 2):

Schon im einfachsten Fall $\boxed{y'(x) = f(x)}$, wo f nur von x abhängt und ‚lösen‘ das Aufsuchen einer Stammfunktion[4] bedeutet, sehen wir, daß die Gewinnung einer Lösung Probleme bereiten kann: Zwar können wir für *stetiges* f eine Lösung durch $y(x) = b + \int_a^x f(t)\,dt$ sofort angeben; aber diese ist nicht immer in ‚geschlossener Form‘ durch bekannte elementare Funktionen darstellbar. Dies ist aber wiederum auch nicht *so* schlimm; denn $\int_a^x f(t)\,dt$ läßt sich mit kontrollierbarer Genauigkeit berechnen. (Man vergleiche dazu etwa auch die approximative Berechnung von $\sin x$ durch Partialsummen der definierenden Potenzreihe.) Darüber hinaus hat LIOUVILLE (1841) gezeigt, daß im allgemeinen Fall viele Differentialgleichungen — z. B. die scheinbar harmlose Differentialgleichung $y' = x^2 - y^2$ — keine Lösungen haben, die in geschlossener Form durch Integration aus elementaren und in der Differentialgleichung selbst gegebenen Funktionen ausgedrückt werden können.

Zu 3):

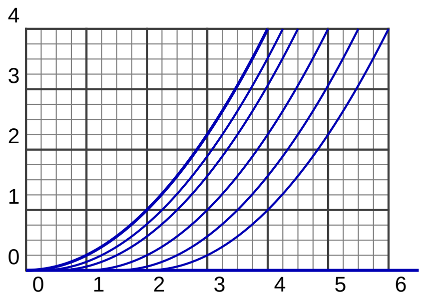
$\boxed{y' = \sqrt{y} \quad (y \geq 0), \quad y(0) = 0}$ hat in $[0, \infty[$ die Lösungen

[3] *Gesucht* sind ein Intervall I mit $a \in I$ und eine differenzierbare Funktion $y\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ so, daß $(x, y(x)) \in \mathfrak{D}$ und $y'(x) = f(x, y(x))$ für alle $x \in I$ sowie $y(a) = b$ gelten. Man spricht von einem *„Anfangswertproblem“* oder einer *„Anfangswertaufgabe“* (*„AWP“* oder *„AWA“*).

[4] In diesem Spezialfall wird die frühere Bezeichnung „Integral“ für eine Lösung besonders verständlich.

$y(x) = 0\,,\ y(x) = \dfrac{x^2}{4}$ und

$$y(x) \;=\; \begin{cases} 0\,, & 0 \le x \le \alpha \\ \dfrac{(x-\alpha)^2}{4}, & \alpha \le x < \infty \end{cases}$$



für $0 < \alpha < \infty$. Es gibt also *lokal* um 0 *unendlich viele Lösungen!*

In Abschnitt 2.1 werden wir sehen, daß durch die o. a. Funktionen *alle* Lösungen erfaßt sind.

Für diejenigen, die ein Faible für besonders Abartiges haben, sollten wir noch sagen: Es gibt eine Differentialgleichung, die *an jeder Stelle* des $\mathbb{R}^2$ *lokal nicht eindeutig* lösbar ist ([Har], Lavrentieff (1925)).

Zu 4) — Existenzintervalle:

Die einfache AWA $\boxed{y' = y^2, \quad y(0) = c > 0}$ hat die Lösung
$y(x) = \dfrac{c}{1-cx}$ für $\; -\infty < x < \dfrac{1}{c}\,.$

Dies zeigt: Allgemeine Existenzsätze sind notwendig von *lokaler* Natur. Existenz ‚im Großen' kann nur unter zusätzlichen Bedingungen gesichert werden.

Mathematische Modellierung

Ehe wir zu 5) etwas sagen, wollen wir uns ansehen, wie im Groben die Beziehung zwischen Theorie und Anwendung ist — man spricht von *Modellierung* oder *Mathematisierung eines Problems.* Bei der mathematischen Beschreibung einer Fragestellung — etwa aus Naturwissenschaften, Technik, Medizin, Wirtschafts- und Sozialwissenschaften — ist jeweils eine Darstellung gesucht, die nur die als wichtig angesehenen Eigenschaften eines Vorbildes in einem überschaubaren und mathematisch beherrschbaren geeigneten *Modell* wiedergibt. Ein solches Modell kann ein leistungsfähiges Werkzeug zum Verständnis der ‚Welt' sein und zu Vorhersagen und zur Kontrolle dienen.

Es handelt sich also um eine vereinfachende, schematisierende und idealisierende Darstellung eines Objektes oder Objektbereiches, in der Beziehungen und Funktionen der Elemente der Objekte — unter speziell vorgegebenen Gesichtspunkten — deutlich herauskristallisiert und hinreichend gut beschrieben werden.

Beobachtung, Erfahrung, Experiment, ... führen durch *Idealisierung* und Isolierung zur mathematischen Formulierung des Problems.

Nach *„Übersetzung"* in die Sprache der Differentialgleichungen (diese beschreibt meist nur approximativ das Problem) ist dann zunächst eine *Lösung* — im Sinne von 1) – 4) — gefragt.

Die Übertragung der aus der Modellierung gewonnenen Ergebnisse auf die Wirklichkeit (Rückinterpretation) erfordert stets sorgfältige und kritische Überprüfung (Begrenztheit des Gültigkeitsbereiches). Sie müssen *interpretiert,* diskutiert und ausgedeutet werden. Die theoretischen Folgerungen sind dann empirisch zu überprüfen. Sie bestätigen im günstigen Fall das Modell oder widerlegen es, was eine bessere Modellierung und damit einen Neuansatz erfordert.

Zu 5) — Abhängigkeit der Lösung(en) von ‚Parametern':

Die Abhängigkeit der Lösung von Eingabedaten ist daher von größter Wichtigkeit für Anwendungen: Die Anfangswerte a und b erhält man etwa durch Messen (Experiment), sie haben also nur beschränkte Genauigkeit! Auch f beschreibt oft nur angenähert das Problem. Die Änderungen von a, b und f beeinflussen die ‚Lösung'. Wie beherrscht man dieses Änderungsverhalten? Bringen ‚kleine' Änderungen von a, b und f auch nur ‚kleine' Änderungen der Lösungen?

Beispiel: $y'' = -\frac{g}{h}\sin y \;\approx -\frac{g}{h}y$ (einfaches Pendel)
Die rechte Seite der DGL $-\frac{g}{h}\sin y$ wird — lokal um 0 — durch den einfacheren Ausdruck $-\frac{g}{h}y$ ersetzt.

Zu 6) — Charakterisierung der Lösung(en):

Das breite Spektrum der Aussagen hierzu sei exemplarisch durch drei völlig unterschiedliche mögliche Antworten angedeutet:

- Die Menge der Lösungen ist ein Vektorraum. (Dies ist z. B. bei der homogenen linearen DGL (Abschnitte 2.3 und 4.2) der Fall.)
- Alle Lösungen lassen sich durch Potenzreihen darstellen. (Hier ist dann ein *Potenzreihenansatz* gerechtfertigt.)
- Die Lösungen liegen zwischen einer minimalen und einer maximalen. (Man vergleiche dazu etwa (B2) aus Abschnitt 2.1.)

Zu 7) — Qualitatives Verhalten

Nicht zu allen Differentialgleichungen kann eine analytische Lösung gefunden werden. Selbst aber, wenn eine solche Lösung existiert, kann die zugehörige ‚Formel' oder Beschreibung zu kompliziert sein, um daraus wichtige Eigenschaften der Lösung zu entnehmen.

Die *qualitative Theorie der Differentialgleichungen* beschäftigt sich mit dem *geometrischen Charakter* von Lösungen, speziell damit, wie charakteristische Eigenschaften der Lösung erschlossen werden können, ohne die vorgegebene Differentialgleichung zu lösen.

So wird etwa in ‚Phasenbildern' die ‚Dynamik' spezieller Systeme visualisiert. Dabei untersucht man u. a. das *Langzeitverhalten* ($x \to \infty$), speziell Fragen der *Stabilität.* So interessieren etwa bei Planetenbewegungen nicht immer die genauen Bahnen, wohl aber die Stabilität des Planetensystems. Entsprechendes gilt z. B. auch in der Biologie (Räuber-Beute-Modelle) und in den Wirtschaftswissenschaften (Marktmodelle).

Wir gehen darauf allgemein kurz in Abschnitt 3.6 und speziell — für homogene lineare Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten — in Abschnitt 5.3 ein.

1.2 Richtungsfelder

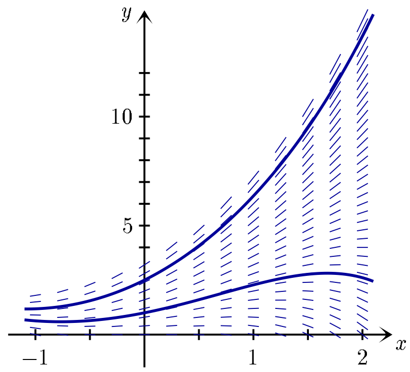
Wir betrachten hier die explizite DGL 1. Ordnung

$$y' = f(x, y)\,.$$

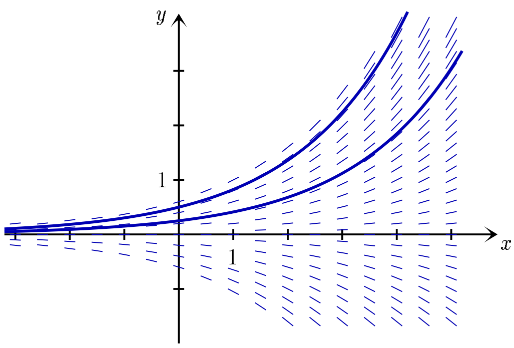
f ordnet jedem Punkt (x, y) (aus dem Definitionsbereich von f) eine Steigung (Richtung) $f(x, y)$ zu. Repräsentiert man diese Richtungen in ihren Trägerpunkten durch kleine Geradenstücke von eben diesen Richtungen — sogenannte *„Linienelemente"* —, so erhält man ein *„Richtungsfeld"*. Lösungen der DGL entsprechen ‚Kurven', die ins Richtungsfeld hineinpassen, in jedem ihrer Punkte also das dort vorgegebene Linienelement als Tangente haben. Richtungsfelder — als geometrische Deutung von DGLen — dienen nicht nur zu deren besserem intuitiven Verständnis, sondern können den Charakter der Lösungsgesamtheit aufzeigen und liefern zudem eine einfache graphische Methode, um Näherungslösungen zu finden.

Sehen wir uns einige Beispiele an:

a) $y' = y - x^2$



b) $y' = \dfrac{1}{2}y$

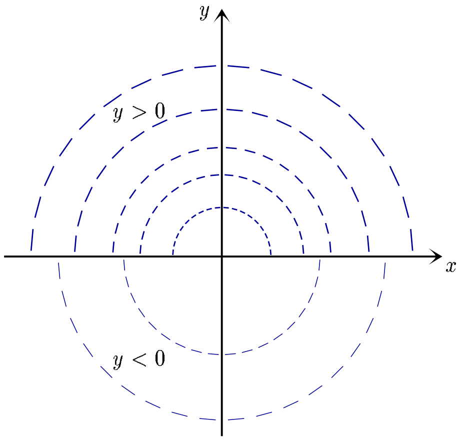


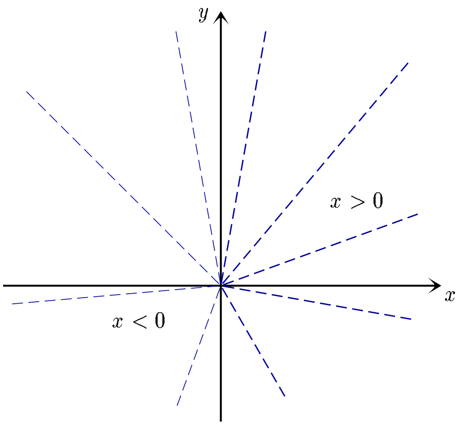
Die durchgezogenen Linien zeigen jeweils mögliche Lösungskurven.

In b) hängt f nur von y ab, was sich natürlich auch aus der Zeichnung entnehmen läßt.

Im folgenden Beispiel c) sind die Lösungen mit $y(a) = b > 0$ *Halb*kreise: $y(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \quad (-r < x < r)$ mit $r := \sqrt{a^2 + b^2}$:

c) $y' = -\dfrac{x}{y}$ d) $y' = \dfrac{y}{x}$





Bei d) ist die Lösung mit $y(a) = b \quad (a > 0)$ gegeben durch die *Halb*gerade: $y(x) := \dfrac{b}{a}\,x \quad (x > 0)$.

Euler-Polygonzugverfahren

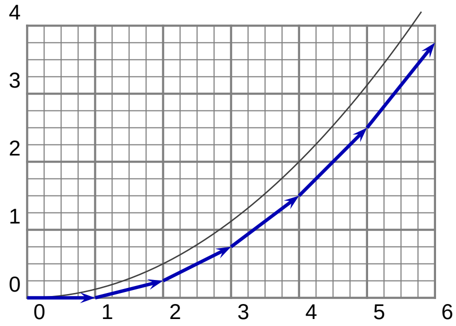
Aus der geometrischen Beschreibung durch Richtungsfelder liest man eine sehr einfache Methode zur näherungsweisen Bestimmung einer Lösung direkt ab. Man startet ‚irgendwo', legt eine positive Schrittweite h fest und geht dann jeweils in der am schon erreichten Punkt vorgegebenen Richtung ein Stück — der Länge h in x-Richtung — geradlinig weiter:

Bei Vorgabe eines ‚Startwertes' (x_0, y_0) erhält man so den Polygonzug durch die Punkte (x_n, y_n), wobei

$$x_n := x_0 + n\,h, \quad y_{n+1} := y_n + f(x_n, y_n)\,h \qquad (n \in \mathbb{N}_0)\ .$$

Beispiel $\boxed{y' = \frac{1}{4}x\,,\ y(0) = 0;\ x_0 := y_0 := 0\,,\ h := 1}$

Dieses Beispiel ist bewußt einfach gehalten, damit die Steigungen und Funktionswerte noch durch Handrechnung leicht nachvollzogen werden können.

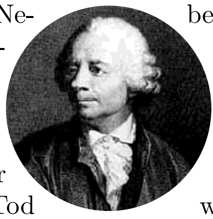


Das so erhaltene Verfahren wird *Euler-Polygonzugverfahren*, auch *Cauchy-Polygonzugverfahren*, *Euler-Cauchy-Polygonzugverfahren* oder nur *Euler-Verfahren* genannt. Es ist eines der ältesten und einfachsten ‚Einschrittverfahren' zur näherungsweisen Lösung einer AWA.

Auf numerische Gesichtspunkte dabei — etwa Einfluß der Schrittweise und Verhalten für große n — gehen wir an dieser Stelle nicht ein.

Historische Notizen

Leonhard EULER (1707–1783)



Mathematiker und Physiker, geb. 15. 4. 1707 in Basel, gest. 18.9.1783 in St. Petersburg. Er war wohl der bedeutendste Mathematiker des 18. Jahrhunderts. Neben der Mathematik hatte er stets ein weites Spektrum von Anwendungen im Blick. Trotz seiner Erblindung im Jahre 1766 war er bis zu seinem Tod wissenschaftlich tätig. Ausdruck seiner Vielseitigkeit und Kreativität sind die zahlreichen Begriffe, Methoden und Sätze, die mit seinem Namen verbunden sind.

Augustin Louis CAUCHY (1789–1857)

Französischer Mathematiker, geb. 21.8.1789 in Paris, gest. 22.5.1857 in Sceaux. Er hatte wesentlichen Anteil an der Entwicklung und Präzisierung der Analysis im 19. Jahrhundert. In seinem *„Cours d'Analyse de l'École Polytechnique"* wurden vorher nur intuitiv benutzte Begriffe von ihm exakt erfaßt, so der Grenzwertbegriff, Ableitung und Integral. Seine Interessen- und Arbeitsgebiete waren sehr breit angelegt. Sein Name wird heute vor allem mit den Gebieten Analysis, Funktionentheorie und Differentialgleichungen verbunden.