# 3 Funktionen Version 22.09.19

Der Funktionsbegriff ist grundlegend für die Mathematik. Wir geben direkt die

**Definition 3.8.** Es seien $X$ und $Y$ Mengen. $f$ ist **Funktion**$(X, Y)$ genau dann, wenn

- $f$ hat die Definitionsmenge $\mathrm{Def}(f) := X$
- zu $f$ und $x \in \mathrm{Def}(f)$ gibt es ein Element $f(x)$
- die Menge aller $f(x)$, die sogenannte Bildmenge von $f$, kurz $\mathrm{Bild}(f)$, ist Teilmenge von $Y$

Für „$f$ ist Funktion$(X, Y)$" schreiben wir

$$f : X \to Y,$$

was wir als „$f$ ist Funktion von $X$ nach $Y$" lesen. Die Menge $Y$ bezeichnen wir auch als *Zielmenge*. Die Zuordnung von $f(x)$ zu einem $x \in \mathrm{Def}(f)$ notieren wir als

$$x \mapsto f(x),$$

was wir als „$x$ wird auf abgebildet auf $f(x)$" lesen.

Für das erste Beispiel sei $k \in \mathbb{Z}$. Wir betrachten

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \\ x &\mapsto k. \end{aligned}$$

Dies ist eine Funktion von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Z}$. Jedes $x$ wird auf $k$ abgebildet. Es handelt sich hier um eine *konstante Funktion.*

Für gewöhnlich wird explizit eine Vorschrift angegeben, wie aus einem gegebenen $x \in \mathrm{Def}(f)$ der zugeordnete Wert $f(x)$ „berechnet" wird, z. B.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \\ x &\mapsto x. \end{aligned}$$

Unter $f$ wird hier $x$ auf sich selbst abgebildet, wir sprechen an dieser Stelle von einer *identischen Abbildung.*

Ein weiteres Beispiel ist

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \\ x &\mapsto 2x + 1. \end{aligned}$$

Folgendes Beispiel illustriert, dass die bloße Angabe einer Definitionsmenge, einer Zielmenge und einer Zuordnungsvorschrift nicht unbedingt eine Funktion liefert. Hierzu sei

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}, x \mapsto -x.$$

Für $x \in \mathbb{N}$ ist nun $f(x) \notin \mathbb{N}$ und damit ist $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ keine Funktion.

Es folgt eine weitere wichtige

**Definition 3.9.** Es sei $f : X \to Y$ eine Funktion und $A \in \mathcal{P}(X)$. $f[A] \in \mathcal{P}(Y)$ gegeben durch

$$f[A] := \{f(a) | a \in A\} = \{y \in Y : \exists a \in A : y = f(a)\}$$

ist das **Bild** von $A$ unter $f$.

In diesem Kontext gilt

**Satz 3.1.** Es sei $f : X \to Y$ eine Funktion und $A_1, A_2 \in \mathcal{P}(X)$. Dann gilt

(i) $f[A_1 \cup A_2] = f[A_1] \cup f[A_2]$

(ii) $f[A_1 \cap A_2] \subset f[A_1] \cap f[A_2]$.

Wir zeigen (i). Es sei also $f : X \to Y$ eine Funktion und $A_1, A_2 \in \mathcal{P}(X)$. Wir zeigen zunächst

$$f[A_1 \cup A_2] \subset f[A_1] \cup f[A_2].$$

Sei $y \in f[A_1 \cup A_2]$, somit gibt es ein $a \in A_1 \cup A_2$ mit $f(a) = y$. $a \in A_1 \cup A_2$ ist eine Abkürzung für

$$(a \in A_1) \vee (a \in A_2).$$

- Im Fall $a \in A_1$ ist $y \in f[A_1]$, also ist $(y \in f[A_1]) \vee (y \in f[A_2])$.
- Im Fall $a \in A_2$ ist $y \in f[A_2]$, also ist $(y \in f[A_1]) \vee (y \in f[A_2])$.

Ingesamt ist $(y \in f[A_1]) \vee (y \in f[A_2])$, d.h.

$$y \in (f[A_1] \cup f[A_2]).$$

Da $y$ beliebig gewählt war, gilt

$$f[A_1 \cup A_2] \subset f[A_1] \cup f[A_2].$$

Wir zeigen nun

$$f[A_1] \cup f[A_2] \subset f[A_1 \cup A_2].$$

Sei nun $y \in f[A_1] \cup f[A_2]$, d.h.

$$(y \in f[A_1]) \vee (y \in f[A_2]).$$

- Im Fall von $y \in f[A_1]$ gibt es ein $a \in A_1$ mit $f(a) = y$. Also ist $a \in A_1 \cup A_2$.
- Im Fall von $y \in f[A_2]$ gibt es ein $a \in A_2$ mit $f(a) = y$. Also ist $a \in A_1 \cup A_2$.

Insgesamt gibt es ein $a \in A_1 \cup A_2$ mit $f(a) = y$. Daraus folgt $y \in f[A_1 \cup A_2]$. Also gilt $f[A_1] \cup f[A_2] \subset f[A_1 \cup A_2]$. ∎
Für den Beweis von (ii) siehe Aufgabe 3.2.

Bei einer gegebenen Funktion $f : X \to Y$ und vorgegebener Teilmenge $B \subset Y$ ist es eine wichtige Fragestellung, welche $x \in \mathrm{Def}(f)$ ein zugeordnetes $f(x)$ in $B$ haben. Die Antwort gibt die Urbildfunktion:

**Definition 3.10.** Es seien $X, Y$ Mengen und $f : X \to Y$ eine Funktion. $f^{-1}$ gegeben durch

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathcal{P}(Y) &\to \mathcal{P}(X) \\ f^{-1}[B] &\mapsto \{x \in \mathrm{Def}(f) : f(x) \in B\} \end{aligned}$$

ist **Urbildfunktion**$(f)$. $A \in \mathcal{P}(X)$ ist **Urbild**$(B)$ für $B \in \mathcal{P}(Y)$ unter $f$ genau dann, wenn $f^{-1}[B] = A$.

Wir betrachten hierzu folgendes Beispiel

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \\ x &\mapsto x^2. \end{aligned}$$

Es gelten beispielsweise

- $f^{-1}[\{4\}] = \{-2, 2\}$
- $f^{-1}[\{-1\}] = \varnothing$
- $f^{-1}[\{3\}] = \varnothing$
- $f^{-1}[\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}] = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

Es gilt folgender

**Satz 3.2.** Es seien $f : X \to Y$ eine Funktion und $B_1, B_2 \in \mathcal{P}(Y)$. Dann gilt

(i) $f^{-1}[B_1 \cup B_2] = f^{-1}[B_1] \cup f^{-1}[B_2]$

(ii) $f^{-1}[B_1 \cap B_2] = f^{-1}[B_1] \cap f^{-1}[B_2]$.

Wir zeigen (i). Es seien $f : X \to Y$ eine Funktion und $B_1, B_2 \in \mathcal{P}(Y)$. Ferner sei $x \in f^{-1}[B_1 \cup B_2]$, dies ist eine Abkürzung für

$$f(x) \in (B_1 \cup B_2),$$

was wiederum eine Abkürzung ist für

$$\begin{aligned}&(f(x) \in B_1) \vee (f(x) \in B_2)\\ &\Leftrightarrow (x \in f^{-1}[B_1]) \vee (x \in f^{-1}[B_2]) \Leftrightarrow x \in (f^{-1}[B_1] \cup f^{-1}[B_2]).\end{aligned}$$

Da $x$ beliebig gewählt war, gilt

$$f^{-1}[B_1 \cup B_2] = f^{-1}[B_1] \cup f^{-1}[B_2]. \quad \blacksquare$$

Für den Beweis von (ii) siehe Aufgabe 3.3.

Wir fassen zusammen:

| Ausdruck | Aussprache | Bedingung | Abkürzung für |
| --- | --- | --- | --- |
| $f : X \to Y$ | $f$ ist Funktion von $X$ nach $Y$ | $X, Y$ ist Menge | Funktion$(X, Y)$ |
| $\mathrm{Def}(f)$ | Definitionsmenge von $f$ | $f : X \to Y, \mathrm{Def}(f) = X$ | – |
| $x \mapsto f(x)$ | $x$ wird auf $f(x)$ abgebildet | $f : X \to Y, x \in \mathrm{Def}(f)$, $f(x) \in Y$ | – |
| $\mathrm{Bild}(f)$ | Bild von $f$ | $f : X \to Y$ | $\{f(x) \vert x \in \mathrm{Def}(f)\}$ |
| $f[A]$ | Bild von $A$ unter $f : X \to Y$ | $f : X \to Y, A \in \mathcal{P}(X)$ | $\{f(a) \vert a \in A\}$ |
| $f^{-1}[B]$ | Urbild von $B$ unter $f : X \to Y$ | $f : X \to Y, B \in \mathcal{P}(Y)$ | $\{x \in X : f(x) \in B\}$ |

Es sei $A$ eine Menge mit endlich vielen Elementen. Mit $|A|$ bezeichnen wir die Anzahl der Elemente von $A$. Bei Mengen $A$ mit unendlich vielen Elementen (kurz: unendliche Mengen) sprechen wir von Mächtigkeit bzw. Kardinalität der Menge anstatt von Anzahl der Elemente der Menge und bezeichnen die Mächtigkeit ebenfalls mit $|A|$.

Es seien Mengen $X$ und $Y$ endliche Mengen mit $|X| \leq |Y|$. Dann gibt es eine Funktion $f : X \to Y$, die die Elemente $x \in \mathrm{Def}(f)$ in $Y$ „einbettet“. Eine solche Funktion stellt eine „Injektion“ dar. Für beliebige Mengen $X$ und $Y$ (also auch unendliche Mengen) geben wir folgende

**Definition 3.11.** Eine Funktion $f : X \to Y$ ist genau dann **injektiv**, wenn

- $\forall y \in Y : |f^{-1}[\{y\}]| \leq 1$.

Eine Funktion $f : X \to Y$ ist also genau dann injektiv, wenn jedes Element $y \in Y$ *höchstens* einmal als Funktionswert von $f$ auftritt.

Die Funktion $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, x \mapsto x^2$ ist nicht injektiv. Beispielsweise gilt $f^{-1}[\{4\}] = \{-2, 2\}$. Somit ist $|f^{-1}[\{4\}]| = 2 > 1$. Anders formuliert: $4 \in \mathbb{Z}$ tritt zweimal als Funktionswert von $f$ auf, daher ist $f$ nicht injektiv.

Wir können Injektivität auch anders charakterisieren. Es gilt folgender

**Satz 3.3.** Eine Funktion $f : X \to Y$ ist genau dann injektiv, wenn

- $\forall x_1 \in \mathrm{Def}(f) : \forall x_2 \in \mathrm{Def}(f) : (f(x_1) = f(x_2)) \Rightarrow (x_1 = x_2)$.

Satz 3.3 besagt: Eine Funktion ist genau dann injektiv, wenn aus der Gleichheit von zwei Bildern die Gleichheit der Urbilder folgt.

Beweis des Satzes 3.3: Wir wollen folgende Äquivalenz zeigen

$$\forall x_1 \in \mathrm{Def}(f) : \forall x_2 \in \mathrm{Def}(f) : (f(x_1) = f(x_2)) \Rightarrow (x_1 = x_2)$$
$$\Leftrightarrow \forall y \in Y : |f^{-1}[\{y\}]| \leq 1.$$

Diese Äquivalenz ist äquivalent zu folgender, die wir mittels Kontraposition erhalten

$$\exists x_1 \in \mathrm{Def}(f) : \exists x_2 \in \mathrm{Def}(f) : (f(x_1) = f(x_2)) \wedge (x_1 \neq x_2)$$
$$\Leftrightarrow \exists y \in Y : |f^{-1}[\{y\}]| > 1.$$

Wir zeigen zunächst die Implikation

$$\exists x_1 \in \mathrm{Def}(f) : \exists x_2 \in \mathrm{Def}(f) : (f(x_1) = f(x_2)) \wedge (x_1 \neq x_2)$$
$$\Rightarrow \exists y \in Y : |f^{-1}[\{y\}]| > 1.$$

Es seien also $x_1, x_2 \in \mathrm{Def}(f)$ mit $x_1 \neq x_2$ und $f(x_1) = f(x_2)$. Wir setzen $y := f(x_1)$. Dann gilt $|f^{-1}[\{y\}]| \geq 2 > 1$. Also gibt es ein $y$ mit der geforderten Eigenschaft.
Nun zeigen wir die andere Implikation

$$\exists y \in Y : |f^{-1}[\{y\}]| > 1$$
$$\Rightarrow \exists x_1 \in \mathrm{Def}(f) : \exists x_2 \in \mathrm{Def}(f) : (f(x_1) = f(x_2)) \wedge (x_1 \neq x_2).$$

Es gebe also ein $y \in Y$ mit $|f^{-1}[\{y\}]| > 1$, d.h. es gibt $x_1, x_2 \in \mathrm{Def}(f)$ mit $x_1 \neq x_2$ und $f(x_1) = f(x_2) = y$. ■

Die Funktion $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, x \mapsto 2x + 1$ ist injektiv.

Es seien $x_1, x_2 \in \mathrm{Def}(f)$ mit $f(x_1) = f(x_2)$. Wir müssen $x_1 = x_2$ zeigen. Aus $f(x_1) = f(x_2)$ folgt

$$2x_1 + 1 = 2x_2 + 1 \Rightarrow 2(x_1 - x_2) = 0.$$

Aufgrund der Nullteilerfreiheit in $\mathbb{Z}$ folgt

$$x_1 - x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2. ■$$

Wir gehen von zwei endlichen Mengen $X$ und $Y$ aus mit $|X| \geq |Y|$. Dann gibt es eine Funktion $f : X \to Y$, die die Elemente von $X$ denjenigen von $Y$ „aufwirft". Eine solche Funktion stellt eine „Surjektion" dar (von „sur" – franz. „auf", von „iacere" – lat. „werfen") Für beliebige Mengen $X$ und $Y$ (also auch unendliche Mengen) geben wir folgende

**Definition 3.12.** Es sei $f : X \to Y$ eine Funktion und $B \in \mathcal{P}(Y)$. $f$ ist genau dann **surjektiv auf** $B$, wenn

- $\forall y \in B : |f^{-1}[\{y\}]| \geq 1.$

Eine Funktion $f : X \to Y$ ist also genau dann surjektiv auf $B \in \mathcal{P}(Y)$, wenn jedes Element $y \in B$ *mindestens* einmal als Funktionswert von $f$ auftritt.

Beispielsweise gilt: $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, x \mapsto x + 1$ ist surjektiv auf $\mathbb{N}$.

Es sei $y \in \mathbb{N}$. Wir müssen ein $x \in \mathbb{Z}$ angeben mit $f(x) = y$. Wir setzen $x := y - 1$. Dann ist $x \in \mathbb{Z}$ und es gilt $f(x) = x + 1 = (y - 1) + 1 = y$.

Hingegen gilt: $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, x \mapsto x + 1$ ist nicht surjektiv auf $\mathbb{N}$.

Wie wir bereits gezeigt haben gilt

$$\forall n \in \mathbb{N} : n > 0.$$

Damit gilt

$$\forall n \in \mathbb{N} : f(n) = n + 1 > 0 + 1 = 1.$$

Somit gilt

$$\forall n \in \mathbb{N} : f(n) \neq 1.$$

Also gilt

$$|f^{-1}[\{1\}]| = 0 < 1.$$

Es gibt also $n \in \mathbb{N}$, nämlich $n = 1$ mit $|f^{-1}[\{n\}]| < 1$, d.h. $f$ ist nicht surjektiv auf $\mathbb{N}$. ∎

Surjektivität lässt sich auch wie folgt formulieren

**Satz 3.4.** Es sei $f : X \to Y$ eine Funktion und $B \in \mathcal{P}(Y)$. $f$ ist genau dann surjektiv auf $B$, wenn

- $\forall y \in B : \exists x \in \mathrm{Def}(f) : y = f(x)$.

(Für den Beweis siehe Aufgabe 3.6.)

Es seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ Funktionen. Wir erklären die **Verkettung von $f$ mit $g$**, abgekürzt mit $g \circ f$, durch

$$\begin{aligned} g \circ f : A &\to C \\ a &\mapsto g(f(a)). \end{aligned}$$

Es gilt folgender

**Satz 3.5.** Es seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ Funktionen. Dann gilt

(i) ($g \circ f$ ist injektiv) $\Rightarrow$ ($f$ ist injektiv)

(ii) ($g \circ f$ ist surjektiv auf $C$) $\Rightarrow$ ($f$ ist surjektiv auf $C$)

Für den Beweis von (i) siehe Aufgabe 3.9.
Wir zeigen (ii): Es sei $g \circ f$ surjektiv auf $C$. Zu zeigen ist, dass

$$g : B \to C$$

surjektiv auf $C$, d.h. zu jedem $c \in C$ gibt es ein $b \in B$ mit $g(b) = c$. Da $g \circ f$ nach Voraussetzung surjektiv auf $C$ ist, gibt es ein $a \in A$ mit $g(f(a)) = c$. Mithin wählen wir $b := f(a)$. Damit gilt $g(b) = c$. ∎

**Definition 3.13.** Eine Funktion $f : X \to Y$ ist **bijektiv** genau dann, wenn

- $f$ ist injektiv
- $f$ ist surjektiv auf $Y$.

Eine Funktion $f : X \to Y$ ist also genau dann bijektiv, wenn jedes Element $y \in Y$ *genau* einmal als Funktionswert von $f$ auftritt.

**Definition 3.14.** Zwei Mengen $X$ und $Y$ sind **gleichmächtig** genau dann, wenn eine Bijektion $f : X \to Y$ existiert.

**Definition 3.15.** Eine Menge $M$ ist **abzählbar unendlich**, wenn es eine Bijektion zwischen $\mathbb{N}$ und $M$ gibt.

Es sei $M$ eine abzählbar unendliche Menge, d.h. $\mathbb{N}$ und $M$ haben die gleiche Mächtigkeit. In diesem Fall können wir die Elemente von $M$ mit den natürlichen Zahlen „durchnummerieren“ und erreichen alle Elemente von $M$. Konkret gibt es also eine bijektive Funktion $f : M \to \mathbb{N}$. Die „Nummer“ von $m \in M$ ist lediglich $f(m) \in \mathbb{N}$.

**Aufgabe 3.1.** Geben Sie die Definitionsmenge der jeweiligen Funktion an:

(i) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}, x \mapsto x - 5$

(ii) $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0, x \mapsto x - 5$

(iii) $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}, x \mapsto |\{y \in \mathbb{Z} : 0 \leq y < x^2\}|$.

**Aufgabe 3.2.** Es sei $f : X \to Y$ eine Funktion mit $A_1, A_2 \in \mathcal{P}(X)$.

(i) Zeigen Sie
$$A_1 \subset A_2 \Rightarrow f[A_1] \subset f[A_2].$$

(ii) Zeigen Sie
$$f(A_1 \cap A_2) \subset f[A_1] \cap f[A_2].$$

(iii) Geben Sie eine Funktion $f : X \to Y$ mit $A_1, A_2 \in \mathcal{P}(X)$ an, so dass gilt
$$f(A_1 \cap A_2) \subsetneq f[A_1] \cap f[A_2].$$

**Aufgabe 3.3.** Es sei $f : X \to Y$ eine Funktion mit $B_1, B_2 \in \mathcal{P}(Y)$. Zeigen Sie
$$f^{-1}[B_1 \cap B_2] = f^{-1}[B_1] \cap f^{-1}[B_2].$$

**Aufgabe 3.4.** Entscheiden Sie, ob die folgenden Funktionen injektiv sind. Beweisen Sie jeweils die Richtigkeit Ihrer Antworten.

(i) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto 3n + 2$

(ii) $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, x \mapsto \begin{cases} x, & \text{falls } x < 0 \\ x - 1, & \text{falls } x \geq 0. \end{cases}$

**Aufgabe 3.5.** Es seien $f : A \to B$ und $g : C \to D$ Funktionen mit $f(A) \subset C$. Wir erklären die **Verkettung von $f$ mit $g$**, abgekürzt mit $g \circ f$, durch
$$g \circ f : A \to, a \mapsto g(f(a)).$$

(i) Es seien $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, x \mapsto x + 2$ und $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, x \mapsto x^3$. Geben Sie die Zuordnungsvorschrift für $g \circ f$ und $f \circ g$ an.

(ii) Es seien $f : A \to B$ und $g : C \to D$ Funktionen mit $f(A) \subset C$. Gilt folgende Aussage

$$(g \circ f \text{ ist surjektiv auf } D) \Rightarrow (f \text{ ist surjektiv auf } B) \quad ?$$

Beweisen Sie die Richtigkeit Ihrer Antwort.

**Aufgabe 3.6.** Es sei $f : X \to Y$ eine Funktion und $B \in \mathcal{P}(Y)$. Zeigen Sie: $f$ ist genau dann surjektiv auf $B$, wenn

$$\forall y \in B : \exists x \in \mathrm{Def}(f) : y = f(x).$$

**Aufgabe 3.7.** Entscheiden Sie, ob die folgenden Funktionen surjektiv sind. Beweisen Sie jeweils die Richtigkeit Ihrer Antworten.

(i) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto 3n + 2$

(ii) $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, x \mapsto \begin{cases} x, & \text{falls } x < 0 \\ x - 1, & \text{falls } x \geq 0. \end{cases}$

**Aufgabe 3.8.** Es sei $f : X \to Y$. Welche der folgenden Aussagen sind äquivalent zueinander? Begründen Sie die Richtigkeit Ihrer Antwort.

(i) $\forall x_1 \in \mathrm{Def}(f) : \forall x_2 \in \mathrm{Def}(f) : (f(x_1) = f(x_2)) \Rightarrow (x_1 = x_2)$

(ii) $\forall x_1 \in \mathrm{Def}(f) : \forall x_2 \in \mathrm{Def}(f) : (x_1 = x_2) \Rightarrow (f(x_1) = f(x_2))$

(iii) $\neg\big[\exists x_1 \in \mathrm{Def}(f) : \exists x_2 \in \mathrm{Def}(f) : (x_1 \neq x_2) \wedge (f(x_1) = f(x_2))\big]$

(iv) $\forall x_1 \in \mathrm{Def}(f) : \forall x_2 \in \mathrm{Def}(f) : (x_1 \neq x_2) \Rightarrow (f(x_1) \neq f(x_2))$

**Aufgabe 3.9.** Es seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ Funktionen. Zeigen Sie

$$(g \circ f \text{ ist injektiv}) \Rightarrow (f \text{ ist injektiv}).$$

**Aufgabe 3.10.** Es seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ Funktionen. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen im allgemeinen **falsch** sind, indem Sie jeweils ein Gegenbeispiel angeben:

(i) $(g \circ f \text{ ist injektiv}) \Rightarrow (g \text{ ist injektiv})$

(ii) $(g \circ f \text{ ist surjektiv}) \Rightarrow (f \text{ ist surjektiv})$

# 4 Induktionsprinzip Version 22.09.19

Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ benutzen wir zum Zählen. Zu den Strukturmerkmalen von $\mathbb{N}$ gehört das *Prinzip der vollständigen Induktion.* Es besagt, dass wir alle natürlichen Zahlen ohne Wiederkehr vom Zählen durchlaufen, wenn wir beginnend bei 1 stets von einer natürlichen Zahl zur nächsten weiterschreiten. Dieses Strukturmerkmal ist so charakteristisch für die natürlichen Zahlen, dass jede Menge $M \subset \mathbb{N}$, die dieses erfüllt, schon $M = \mathbb{N}$ bedeutet. Wir erhalten folgende für-alle-Aussage

$$\forall M \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) : [(1 \in M) \wedge (\forall n \in M : (n+1) \in M)] \Rightarrow M = \mathbb{N}. \tag{4.1}$$

Ist $A(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Aussage, so können wir folgende Menge

$$M := \{n \in \mathbb{N} : A(n) \text{ ist wahr}\}$$

bilden. Nach (4.1) gilt die Aussage $A(n)$ nun für alle $n \in \mathbb{N}$, wenn

- $A(1)$ wahr ist, was äquivalent zu $1 \in M$ ist
- $\forall n \in \mathbb{N} : A(n) \Rightarrow A(n+1)$, was äquivalent zu

  $$\forall n : n \in M \Rightarrow (n+1) \in M$$

  ist.

Wir erhalten hieraus

**Merkregel Beweisprinzip der vollständigen Induktion:**
Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei eine Aussage $A(n)$ gegeben und es gelte

- Induktionsanfang: $A(1)$ ist wahr
- Induktionsschritt: $\forall n \in \mathbb{N} : A(n) \Rightarrow A(n+1)$.

Dann gilt $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Zu Induktionsanfang sagen wir auch *Induktionverankerung* und zu Induktionsschritt auch *Induktionsschluss.*

Als Beispiel beweisen wir folgende Aussage mit dem Beweisprinzip der vollständigen Induktion

$$\forall n \in \mathbb{N} : 9 | (4^n + 15n - 1).$$

Dabei benutzen wir folgende für-alle-Aussage (Übungsaufgabe)

$$\forall a \in \mathbb{Z} : \forall b \in \mathbb{Z} : \forall c \in \mathbb{Z} : \forall x \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z} : (a|b) \land (a|c) \Rightarrow a|(xb + yc). \tag{4.2}$$

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $A(n)$ die Aussage $9|(4^n + 15n - 1)$.

- Induktionsanfang: Wir zeigen, dass $A(1)$ gilt: Für $n = 1$ ist

  $$4^1 + 15 \cdot 1 - 1 = 18.$$

  Es gilt $(9|18)$, denn $18 = 2 \cdot 9$.

- Induktionsschritt: Wir zeigen

  $$\forall n \in \mathbb{N} : A(n) \Rightarrow A(n+1).$$

  Zum Nachweis der für-alle-Aussage sei $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Zum Nachweis der Implikation nehmen wir nun an, dass $A(n)$ für dieses $n$ wahr ist (Induktionsvoraussetzung, kurz IV) und zeigen, dass dann $A(n+1)$ auch wahr ist (Induktionsbehauptung, kurz IB). Konkret haben wir zu zeigen

  $$\forall n \in \mathbb{N} : [9|(4^n + 15n - 1)] \Rightarrow [9|(4^{n+1} + 15(n+1) - 1)].$$

  Für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte (IV), also

  $$9|(4^n + 15n - 1)$$

  und wir wollen (IB) zeigen, d.h.

  $$9|(4^{n+1} + 15(n+1) - 1).$$

  Wir haben

  $$4^{n+1} + 15(n+1) - 1 = (4^n + 15n - 1) + (3 \cdot 4^n + 15).$$

  Nach (IV) gilt $9|(4^n + 15n - 1)$. Ferner gilt

  $$3 \cdot 4^n + 15 = 3(4^n + 15n - 1) - 45n + 18.$$

  Wegen

  $$-45n + 18 = 9(-5n + 2)$$

  gilt $9|(-45n + 18)$. Mit (IV) und (4.2) folgt daraus

  $$9|(4^{n+1} + 15(n+1) - 1).$$

  Damit haben wir den Induktionsschritt gezeigt.

Nach dem Beweisprinzip der vollständigen Induktion gilt die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$. ■

Das Beweisprinzip der vollständigen Induktion können wir natürlich auch anwenden, um zu zeigen, dass eine Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq k}$ mit $k \in \mathbb{N}$ wahr ist. Hierzu wählen wir als Induktionsanfang $n = k$ und zeigen ferner

$$\forall n \in \mathbb{N}_{\geq k} : A(n) \Rightarrow A(n+1).$$

Wir betrachten hierzu folgendes Beispiel

$$\forall n \in \mathbb{N} : (n \geq 9) \Rightarrow (2^n > 4n^2 + 1).$$

Diese Aussage lässt sich zu folgenden äquivalenten Aussage umformulieren

$$\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 9} : (2^n > 4n^2 + 1).$$

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $A(n)$ die Aussage $(2^n > 4n^2 + 1)$.

- IA: Diese Ungleichung ist offenbar für $n = 9$ richtig:

  $$2^9 = 512 > 4 \cdot 9^2 + 1 = 325.$$

  Also gilt $A(9)$.

- IS: Es gelte die Ungleichung für ein $n \geq 9$, d.h.

  $$2^n > 4n^2 + 1.$$

  Zu zeigen ist dann

  $$2^{n+1} > 4(n+1)^2 + 1. \tag{4.3}$$

  Nach Induktionsvoraussetzung gilt

  $$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2(4n^2 + 1).$$

  Es genügt daher zu zeigen, dass gilt

  $$2(4n^2 + 1) > 4(n+1)^2 + 1. \tag{4.4}$$

  Hierbei haben wir die Transitivität der $>$-Relation benutzt, konkret

  $$\forall a \in \mathbb{Z} : \forall b \in \mathbb{Z} : \forall c \in \mathbb{Z} : [(a > b) \wedge (b > c)] \Rightarrow (a > c),$$

  mit $a := 2^{n+1}, b := 2(4n^2 + 1)$ und $c := 4(n+1)^2 + 1$. Der „Vorteil“ von (4.4) gegenüber (4.3), dass $n$ auf beiden Seiten der Ungleichung quadratisch auftritt; bei (4.3) ist $n$ auf der linken Seite im Exponenten. Die Aussage (4.4) ist nun äquivalent zu

  $$2(4n^2 + 1) - 4(n+1)^2 - 1 > 0.$$

Ausmultiplizieren und Zusammenfassen der linken Seite ergibt

$$\begin{aligned}8n^2 + 2 - 4(n^2 + 2n + 1) - 1 &= 8n^2 + 2 - 4n^2 - 8n - 4 - 1 \\ = 4n^2 - 8n - 3 &= (4n^2 - 8n + 4) - 4 - 3 = 4(n-1)^2 - 7.\end{aligned}$$

Für $n \geq 9$ gilt offenbar

$$4(n-1)^2 > (n-1)^2 > n - 1 \geq 8 > 7,$$

d.h.

$$4(n-1)^2 - 7 > 0.$$

Dies war zu zeigen. Damit ist der Nachweis der Induktionsbehauptung erbracht.

Nach dem Beweisprinzip der vollständigen Induktion gilt die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 9}$. ■

**Aufgabe 4.1.** Zeigen Sie mit dem Beweisprinzip der vollständigen Induktion

(i) $\forall n \in \mathbb{N} : 7|(8^n - 1)$

(ii) $\forall n \in \mathbb{N} : 6|(2n^3 + 3n^2 + n)$

(iii) $\forall n \in \mathbb{N} : 19|(5 \cdot 2^{3n-2} + 3^{3n-1})$

**Aufgabe 4.2.** Zeigen Sie mit dem Beweisprinzip der vollständigen Induktion

$$\forall x \in \mathbb{Z} : \forall n \in \mathbb{N} : (x \geq -1) \Rightarrow [(1 + x)^n \geq (1 + nx)].$$

**Aufgabe 4.3.** Zeigen Sie

$$\forall n \in \mathbb{N} : (n \geq 10) \Rightarrow (2^n > n^3).$$

**Aufgabe 4.4.** Zeigen Sie

$$\forall a \in \mathbb{N} : \forall b \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : \left(\frac{a+b}{2}\right)^n \leq \frac{a^n + b^n}{2}.$$

Hierbei dürfen Sie die bekannten Schulrechenregeln für Brüche benutzen.

# 5 Rekursionsprinzip Version 22.09.19

Bei der Induktion nutzen wir die Struktureigenschaft von $\mathbb{N}$ aus. Beginnend bei 1 zählen wir hoch und erreichen eine beliebige Zahl $n \in \mathbb{N}$. Bei der Rekursion beginnen wir bei einer natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ und zählen herunter bis wir $1 \in \mathbb{N}$ erreichen (und dann stoppen wir).

Bei der Induktion gehen wir von $n \in \mathbb{N}$ auf $(n+1) \in \mathbb{N}$. Bei der Rekursion gehen wir von $(n+1) \in \mathbb{N}$ auf $n \in \mathbb{N}$ („recurrere"– lat. „zurücklaufen").

Funktionen können nun rekursiv definiert werden (das wir dies in eindeutiger Weise tun können, besagt der sogenannte *Rekursionssatz*).

Als erstes Beispiel betrachten wir die Funktion

$$\mathrm{faku} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

definiert durch

$$\begin{aligned} &\mathrm{faku}(1) := 1 \\ &\mathrm{faku}(n+1) := \mathrm{faku}(n) \cdot (n+1). \end{aligned}$$

Um also $\mathrm{faku}(n+1)$ zu erhalten, greifen wir auf $\mathrm{faku}(n)$ zu. Dies setzen wir so lange fort bis wir $\mathrm{faku}(1)$ erreicht haben. Beispielsweise gilt

$$\mathrm{faku}(3) = \mathrm{faku}(2) \cdot 3 = \mathrm{faku}(1) \cdot 2 \cdot 3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6.$$

Für gewöhnlich schreiben wir für $\mathrm{faku}(n)$ kurz $n!$ (lies: „Fakultät von $n$"). $\mathrm{faku}(n)$ ist eine Präfix-Notation, d.h. der Funktionsname steht vor dem Argument $n$ und $n!$ ist eine Postfix-Notation, d.h. der Funktionsname steht hinter dem Argument $n$.

Es sei

$$\begin{aligned} a : \mathbb{N} &\to \mathbb{Z} \\ n &\mapsto a(n). \end{aligned}$$

Für $a(n)$ schreiben wir kurz $a_n$.

Rekursiv definieren wir nun den Ausdruck

$$\sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Wir setzen

$$\sum_{k=1}^{1} a_k := a_1$$

und

$$\sum_{k=1}^{n+1} a_k := \sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1}.$$

Es seien $m, n \in \mathbb{N}$.

- Im Fall von $m = n$ setzen wir

$$\sum_{k=m}^{m} a_k := a_m.$$

- Im Fall von $m < n$ setzen wir

$$\sum_{k=m}^{n} a_k := \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{m-1} a_k.$$

- Im Fall von $m > n$ setzen wir

$$\sum_{k=m}^{n} a_k := 0,$$

  und nennen so einen Ausdruck eine *leere Summe*.

Der griechische Buchstabe $\Sigma$ (lies: Sigma) steht für Summe. Im Ausdruck

$$\sum_{k=1}^{n} a_k$$

wird $k$ *Laufindex* oder auch *Laufvariable* genannt und $n$ *Endindex*.

Als Beispiel betrachten wir

$$\begin{aligned} a : \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ n &\mapsto n. \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\sum_{k=1}^{1} k = 1$$

und

$$\sum_{k=1}^{n+1} k := \sum_{k=1}^{n} k + (n+1).$$

Somit gilt

$$\sum_{k=1}^{4} k = \sum_{k=1}^{3} k + 4 = \left(\sum_{k=1}^{2} k + 3\right) + 4 = \left(\left(\sum_{k=1}^{1} k + 2\right) + 3\right) + 4 = 1 + 2 + 3 + 4.$$

Aufgrund der Kommutativität und Assoziativität der Addition kann die Summierung induktiv gelesen werden:

$$\sum_{k=1}^{4} k = 1 + \sum_{k=2}^{4} k = 1 + 2 + \sum_{k=3}^{4} k = 1 + 2 + 3 + \sum_{k=4}^{4} k = 1 + 2 + 3 + 4.$$

Es sei $n \in \mathbb{N}$. Die Summe der ersten $n$ natürlichen Zahlen, ausgedrückt durch

$$\sum_{k=1}^{n} k,$$

kommt immer wieder vor. Es gilt hier die *Gaußsche Summenformel*

$$\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{5.1}$$

Links steht ein rekursiver Ausdruck für dessen Auswertung wir linear, also $n$, Rechenschritte ausführen müssen, wenn wir seiner rekursiven Definition folgen. Rechts steht ein expliziter Ausdruck, den wir sofort, also mit einem konstanten Rechenaufwand ausführen können. Es liegt auf der Hand, dass der rechte Ausdruck den Rechenaufwand auf ein Minimum reduziert. In der Regel ist es nicht einfach für einen rekursiven Ausdruck einen expliziten zu finden.

Wir beweisen nun (5.1) mittels vollständiger Induktion. Es sei $A(n)$ die Aussage

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

IA: Für $n = 1$ gilt

$$\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1 \cdot 2}{2}.$$

Also gilt $A(1)$.
IS: Es gelte $A(n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$, d.h.

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Zu zeigen ist

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Wir haben

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) &\overset{\text{(IV)}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.\end{aligned}$$

Damit ist der Induktionsschritt gezeigt. Nach dem Beweisverfahren der vollständigen Induktion gilt $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. ■

Anstatt

$$\sum_{k=1}^{n} a_k$$

schreiben wir auch

$$\sum_{1 \le k \le n} a_k.$$

Es sei $I \subset \mathbb{N}$ eine endliche Menge, etwa

$$I := \{3, 4, 5\}.$$

So bedeutet

$$\sum_{k \in I} a_k$$

die Summe

$$a_3 + a_4 + a_5.$$

Falls $I = \varnothing$, so setzen wir

$$\sum_{k \in \varnothing} a_k := 0.$$

**Aufgabe 5.1.** Es seien $a : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, n \mapsto a_n$ und $b : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, n \mapsto b_n$. Ferner seien $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$. Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke mit *einem* Summensymbol

(i) $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13$

(ii) $49 + 1 + 9 + 25 + 16 + 4 + 36$

(iii) $a_{n-1} + a_1 + \sum_{k=3}^{n-2} a_k + a_2$

(iv) $\alpha \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k + \beta \cdot \sum_{m=2}^{n} b_m$.

**Aufgabe 5.2.** Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion

(i) $\forall n \in \mathbb{N} : \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=2}^{n+1} a_{k-1}$ (ii) $\forall n \in \mathbb{N} : \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

**Aufgabe 5.3.** Es seien

$$A := \{n \in \mathbb{N} : 1 \leq n \leq 25\} \text{ und } B := \{n \in \mathbb{N} : 17 \leq n \leq 40\}.$$

Berechnen Sie

(i) $\displaystyle\sum_{k \in A \cup B} k$ (ii) $\displaystyle\sum_{k \in A \cap B} k$ (iii) $\displaystyle\sum_{k \in A \setminus B} k$ (iv) $\displaystyle\sum_{k \in A \cup B} k^2$.

**Aufgabe 5.4.** Es sei $a : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}, n \mapsto a_n$. Hier bezeichnet $\mathbb{Q}$ die Menge der rationalen Zahlen. Wir definieren

$$\prod_{k=1}^{n} a_k$$

rekursiv durch

$$\prod_{k=1}^{1} a_k := a_1 \text{ und } \prod_{k=1}^{n+1} a_k := \prod_{k=1}^{n} a_k \cdot a_{n+1}.$$

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion

$$\forall n \in \mathbb{N} : \prod_{k=1}^{n} \frac{k+2}{k} = \sum_{k=1}^{n+1} k.$$