

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DELLA CALABRIA

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

---

Corso di Laurea in Matematica

Successioni uniformemente distribuite  
su insiemi frattali

RELATORE

prof. Aljosa Volčič

CANDIDATA

Infusino Maria

Matr. 102823

---

Anno Accademico 2006-07

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DELLA CALABRIA

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

---

Corso di Laurea in Matematica

Successioni uniformemente distribuite  
su insiemi frattali

RELATORE

prof. Aljosa Volčič

CANDIDATA

Infusino Maria

Matr. 102823

---

Anno Accademico 2006-07

*A nonno Domenico  
che tanto avrebbe voluto  
avere in mano questa tesi*

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>5</b>
<b>1 Distribuzione uniforme mod 1</b>	<b>9</b>
1.1 Successioni di punti uniformemente distribuite . . . . .	9
1.1.1 Definizioni e proprietà basilari . . . . .	9
1.1.2 Criterio di Weyl . . . . .	15
1.2 Costruzione di successioni di punti uniformemente distribuite sull'intervallo unitario . . . . .	24
1.2.1 Costruzione di Knapowski . . . . .	25
1.2.2 Successione "mille foglie" . . . . .	28
1.2.3 Successioni di Van der Corput e di Halton . . . . .	32
1.3 Successioni di partizioni uniformemente distribuite . . . . .	34
1.3.1 Relazione tra uniforme distribuzione di successioni di punti e di partizioni . . . . .	35
1.3.2 Partizioni di Kakutani . . . . .	40
<b>2 Elementi di geometria frattale</b>	<b>51</b>
2.1 Oggetti frattali . . . . .	52
2.1.1 Esempi di frattali . . . . .	53
2.1.2 Proprietà degli insiemi frattali . . . . .	62

2.2	Misura e dimensione di Hausdorff . . . . .	63
2.2.1	Definizione e proprietà della misura di Hausdorff . . . . .	63
2.2.2	Dimensione di Hausdorff . . . . .	71
2.2.3	Dimensione di Minkowski . . . . .	78
2.2.4	Relazione tra la dimensione di Hausdorff e la dimensione di Minkowski . . . . .	79
2.3	Frattali definiti da IFS . . . . .	83
2.3.1	Sistema di funzioni iterate . . . . .	83
2.3.2	Dimensione di insiemi autosimili . . . . .	88
<b>3</b>	<b>Distribuzione uniforme su alcuni frattali</b>	<b>98</b>
3.1	Distribuzione uniforme su spazi compatti . . . . .	98
3.2	Successioni uniformemente distribuite su alcuni frattali . . . . .	102
3.2.1	Successioni uniformemente distribuite sull'insieme di Cantor . . . . .	102
3.2.2	Algoritmo per generare successioni uniformemente distribuite sui frattali . . . . .	106
3.2.3	Successioni uniformemente distribuite sul Triangolo di Sierpiński . . . . .	108
3.2.4	Successioni uniformemente distribuite sulla Curva di Von Koch . . . . .	113
	<b>Bibliografia</b>	<b>117</b>

# Elenco delle figure

1.1	Esempio di ordinamento "mille foglie" . . . . .	31
2.1	Costruzione dell'insieme di Cantor . . . . .	54
2.2	Costruzione della curva di Von Koch . . . . .	58
2.3	Costruzione del triangolo di Sierpiński . . . . .	59
2.4	Costruzione del fiocco di neve di Koch . . . . .	60
2.5	Insieme di Mandelbrot . . . . .	60
2.6	Insieme di Julia . . . . .	61
2.7	Spugna di Sierpiński . . . . .	61
2.8	Costruzione del tappeto di Sierpiński . . . . .	62
2.9	Grafico di $\mathcal{H}^s(F)$ rispetto a $s$ . . . . .	72
2.10	Esempio di frattale a dimensione intera . . . . .	97
3.1	Successione u.d. sull'insieme di Cantor . . . . .	103
3.2	Successione u.d. sul triangolo di Sierpiński (I passo) . . . . .	110
3.3	Successione u.d. sul triangolo di Sierpiński (II passo) . . . . .	110
3.4	Successione u.d. sul triangolo di Sierpiński (III passo) . . . . .	111
3.5	Successione u.d. sulla curva di Von Koch . . . . .	114

# Introduzione

La ricerca di successioni uniformemente distribuite di punti e di partizioni di un insieme è un problema che appartiene al cuore della teoria della misura. Oggetto del presente lavoro è la costruzione di classi successioni uniformemente distribuite su insiemi frattali.

Il concetto di uniforme distribuzione mod 1 per successioni di numeri reali nasce intorno al 1910 e la sua formalizzazione si deve a Weyl. Molti matematici si interessarono alla teoria dell'uniforme distribuzione nella prima metà del secolo scorso, mirando soprattutto a stabilire criteri per individuare classi di successioni uniformemente distribuite.

Nel primo capitolo, perciò, abbiamo riportato le definizioni basilari e le principali caratterizzazioni delle successioni di punti uniformemente distribuite mod 1. Quindi abbiamo introdotto il criterio di Weyl, limitandoci a studiare solo alcune delle sue molteplici applicazioni. Infatti la nostra attenzione è stata rivolta essenzialmente alla determinazione di esempi concreti di successioni uniformemente distribuite. Diversi sono i metodi conosciuti per costruire successioni di punti uniformemente distribuite su  $[0, 1]$ , tra i quali la tecnica di Knapowski e quella di van der Corput-Halton. In particolare abbiamo presentato le difficoltà che si incontrano nell'individuare una successione uniformemente distribuita su  $[0, 1]$  costituita dai punti determinanti le partizioni binarie dell'intervallo unitario. Questo problema è stato risolto

tramite la tecnica "mille foglie", che introduce un nuovo ordine sui punti delle decomposizioni binarie, garantendo così l'uniforme distribuzione della successione generata.

La teoria dell'uniforme distribuzione mod 1 si estende anche alle successioni di partizioni. Questo concetto è stato introdotto da Kakutani nel 1976, il quale costruì un esempio significativo di successione uniformemente distribuita di partizioni. Esiste uno stretto legame tra successioni di punti e successioni di partizioni uniformemente distribuite. A tal proposito riportiamo una recente conclusione ottenuta da Volčič, che mostra come sia possibile associare ad ogni successione di partizioni uniformemente distribuita una successione di punti ancora uniformemente distribuita. Questo risultato apre la strada a diverse generalizzazioni ed applicazioni della procedura di Kakutani.

Prima di affrontare la costruzione di successioni uniformemente distribuite sui frattali, nel secondo capitolo inseriamo degli elementi di geometria frattale. Da alcuni esempi molto noti di oggetti frattali, l'insieme di Cantor, il triangolo di Sierpiński e la curva di Von Koch, abbiamo dedotto una lista di proprietà caratterizzanti un frattale senza entrare nel merito del problema, aperto ancora oggi, di fornire una definizione precisa di frattale.

I tre esempi, appena citati, costituiscono dei punti di riferimento in questa tesi. Infatti è proprio su questi tre frattali che abbiamo realizzato l'obiettivo di questo lavoro.

Come misura di probabilità sui frattali abbiamo considerato la misura di Hausdorff normalizzata. Per definirla abbiamo seguito la linea proposta da Rogers, cioè abbiamo costruito la misura di Hausdorff  $s$ -dimensionale  $\mathcal{H}^s$  a partire da una valutazione su una classe di insiemi di uno spazio metrico generico. Studiando l'andamento della misura di Hausdorff  $s$ -dimensionale di un insieme dato  $F$  rispetto a  $s$ , osserviamo che essa compie un salto da  $\infty$  in



corrispondenza di un valore critico, che si dice dimensione di Hausdorff di  $F$ . Esistono diverse definizioni di dimensione per un frattale. Abbiamo proposto soltanto la dimensione di Minkowski (o box dimension), come definizione alternativa di dimensione, perchè risulta semplice sia calcolarla matematicamente che stimarla empiricamente e inoltre perchè è strettamente in relazione con la dimensione di Hausdorff.

Il calcolo della dimensione di un frattale, in particolare di quella di Hausdorff, non sempre è un problema di facile risoluzione, tuttavia esiste un metodo immediato per particolari frattali, che ci consente un calcolo veloce della loro dimensione di Hausdorff. I frattali in questione sono i cosiddetti frattali IFS, cioè i frattali ottenuti tramite il metodo IFS (Iterated Function System), da noi tradotto "Sistema di funzioni iterate". Questa tecnica di costruzione sfrutta la proprietà di autosimilarità di un frattale, permettendoci di individuarlo come l'unico insieme compatto invariante rispetto ad una famiglia di contrazioni. Proprio per una classe di frattali IFS, cioè quelli che soddisfano la condizione dell'insieme aperto, abbiamo dimostrato un teorema che consente di determinare la dimensione di Hausdorff di un frattale di questo tipo a partire dalle similitudini che lo definiscono. Grazie a questo risultato, abbiamo calcolato facilmente la dimensione di Hausdorff dell'insieme di Cantor, del triangolo di Sierpiński e della curva di Von Koch.

Sfruttando allora le definizioni e le proprietà fondamentali della teoria dell'uniforme distribuzione su spazi compatti, abbiamo cercato di estendere la validità delle tecniche introdotte nel primo capitolo, al fine di ottenere successioni uniformemente distribuite su questi tre frattali. Ispirati, infatti, dalla procedura usata per costruire la successione "mille foglie" su  $[0, 1]$ , nel terzo capitolo, abbiamo presentato un esempio di successione di punti dell'insieme di Cantor uniformemente distribuita rispetto alla misura di Hausdorff

s-dimensionale, con  $s = \frac{\log 2}{\log 3}$ .

Quindi abbiamo generalizzato questo metodo, introducendo un vero e proprio algoritmo, che tramite le trasformazioni che definiscono il frattale IFS considerato, genera una successione di punti appartenenti al frattale stesso. Per l'insieme di Cantor, per il triangolo di Sierpiński e per la curva di von Koch abbiamo dimostrato che le successioni prodotte dall'algoritmo sono uniformemente distribuite rispetto alla misura di Hausdorff normalizzata. In particolare per la curva di Von Koch, sfruttando l'omeomorfismo esistente tra  $K$  e  $[0, 1]$  abbiamo proposto un secondo esempio concreto di successione di punti uniformemente distribuita su  $K$ .

I risultati ottenuti in questa tesi, ci permettono di ritenere possibile che l'algoritmo introdotto generi successioni di punti uniformemente distribuite rispetto alla misura di Hausdorff normalizzata su ogni frattale IFS che verifica la condizione dell'insieme aperto, tuttavia non abbiamo intrapreso in questo lavoro la ricerca di una dimostrazione per questa idea.

# Capitolo 1

## Distribuzione uniforme mod 1

### 1.1 Successioni di punti uniformemente distribuite

#### 1.1.1 Definizioni e proprietà basilari

Per ogni numero  $x \in \mathbb{R}$  sia  $\{x\}$  la parte frazionaria di  $x$ , che soddisfa:  $\{x\} = x - [x]$ , dove con  $[x]$  indichiamo la parte intera di  $x$ , cioè il più grande intero minore o uguale a  $x$ .

**Definizione 1.1.1.** *Una successione di numeri reali  $(x_n)$ ,  $n = 1, 2, \dots$  si dice uniformemente distribuita modulo 1 (u.d. mod 1) se per ogni coppia di numeri  $a, b$  tali che  $0 < a < b < 1$  risulta:*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \chi_{[a,b[}(\{x_n\}) = b - a \quad (1.1)$$

dove  $\chi_{[a,b[}$  è la funzione caratteristica dell'intervallo  $[a, b[$ .

Equivalentemente per successioni di punti appartenenti all'intervallo unitario  $[0, 1]$  definiamo:

**Definizione 1.1.2.** Una successione  $(x_n)$  di punti in  $[0, 1]$  si dice uniformemente distribuita (u.d.) se per ogni numero  $a$  tale che  $0 < a < 1$  risulta:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \chi_{[0,a]}(x_n) = a \quad (1.2)$$

dove  $\chi_{[0,a]}$  è la funzione caratteristica dell'intervallo  $[0, a]$ .

Introduciamo ora il concetto di famiglia determinante, che ci consentirà di caratterizzare le successioni di punti uniformemente distribuite.

**Definizione 1.1.3.** Una famiglia di funzioni integrabili  $\mathcal{F}$  si dice determinante, se una qualunque successione  $(x_n)$  è u.d. se e soltanto se:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n) = \int_0^1 f(x) dx \quad (1.3)$$

per ogni  $f \in \mathcal{F}$ .

**Osservazione 1.1.4.** Possiamo riformulare la definizione 1.1.2, dicendo che la famiglia delle funzioni caratteristiche di tutti gli intervalli del tipo  $[0, a]$ , con  $0 < a < 1$ , è determinante.

**Esempi 1.1.5.**

1. La famiglia delle funzioni caratteristiche di tutti i sottointervalli (aperti, chiusi o semiaperti) di  $[0, 1]$  è determinante.
2. La famiglia delle funzioni caratteristiche di tutti gli intervalli del tipo  $[0, q]$  con  $q \in \mathbb{Q}$  è determinante.
3. la famiglia delle funzioni caratteristiche di tutti gli intervalli binari  $[\frac{h-1}{2^s}, \frac{h}{2^s}[$  con  $s \in \mathbb{N}$  e  $1 \leq h \leq 2^s$ , è determinante.
4. La famiglia di tutte le funzioni semplici, cioè di tutte le combinazioni lineari finite di funzioni caratteristiche di intervalli semiaperti, è determinante.

5. La famiglia di tutte le funzioni continue a valori reali (o complessi) è determinante.
6. La famiglia di tutte le funzioni  $g$  continue su  $[0, 1]$  tali che  $g(0) = g(1)$  è determinante.
7. La famiglia di tutti i polinomi a coefficienti razionali è determinante.
8. La famiglia di tutte le funzioni integrabili secondo Riemann è determinante.

Studiamo ora in dettaglio alcuni degli esempi sopra elencati che ci saranno utili in seguito.

**Teorema 1.1.6** (Teorema di Weyl). *Una successione  $(x_n)$  è u.d. in  $[0, 1]$  se e soltanto se per ogni funzione  $f$  continua a valori reali vale la 1.3.*

*Dimostrazione.*

Mostriamo preliminarmente la 1.3 nel caso di una funzione semplice.

Sia  $(x_n)$  una successione u.d. e sia  $f$  una funzione semplice sull'intervallo  $[0, 1]$ , cioè

$$f(x) = \sum_{i=0}^{k-1} d_i \chi_{[a_i, a_{i+1}]}(x_n) \quad (1.4)$$

dove  $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_k = 1$  e  $d_i \in \mathbb{R}$  per  $i = 0, \dots, k$ . Usando la 1.2 e la 1.4 risulta:

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sum_{i=0}^{k-1} d_i \chi_{[a_i, a_{i+1}]}(x_n) \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \int_0^1 d_i \chi_{[a_i, a_{i+1}]}(x) dx \\ &= \int_0^1 f(x) dx \end{aligned} \quad (1.5)$$

Assumiamo ora che sia  $f$  sia continua e a valori reali su  $[0, 1]$ . Dalla definizione di integrale di Riemann abbiamo che, fissato  $\varepsilon > 0$ , esistono due funzioni semplici  $f_1$  e  $f_2$  tali che

$$f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x) , \forall x \in [0, 1]$$

e inoltre vale

$$\int_0^1 [f_2(x) - f_1(x)] dx \leq \varepsilon$$

Da queste due relazioni segue che:

$$\int_0^1 f(x) dx \leq \int_0^1 f_2(x) dx \leq \int_0^1 f_1(x) dx + \varepsilon$$

Tenendo conto anche della 1.5 otteniamo le seguenti disuguaglianze:

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx - \varepsilon &\leq \int_0^1 f_1(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f_1(x_n) \\ &\leq \underline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n) \leq \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n) \\ &\leq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f_2(x_n) = \int_0^1 f_2(x) dx \\ &\leq \int_0^1 f_1(x) dx + \varepsilon \leq \int_0^1 f(x) dx + \varepsilon \end{aligned} \quad (1.6)$$

Dall'arbitrarietà di  $\varepsilon$  segue la 1.3.

Viceversa sia  $(x_n)$  una successione di punti in  $[0, 1]$  tale che valga la 1.3 per ogni  $f$  continua e a valori reali. Sia  $a \in ]0, 1[$ , allora fissato  $\varepsilon > 0$ , esistono due funzioni continue  $g_1$  e  $g_2$  tali che:

$$g_1(x) \leq \chi_{[0, a[}(x) \leq g_2(x) , \forall x \in [0, 1]$$

e inoltre vale:

$$\int_0^1 [g_2(x) - g_1(x)] dx \leq \varepsilon$$

Allora risulta:

$$\begin{aligned}
a - \varepsilon &\leq \int_0^1 g_2(x) \, dx - \varepsilon \leq \int_0^1 g_1(x) \, dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N g_1(x_n) \\
&\leq \underline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \chi_{[0, a[}(x_n) \leq \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \chi_{[0, a[}(x_n) \\
&\leq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N g_2(x_n) = \int_0^1 g_2(x) \, dx \\
&\leq \int_0^1 g_1(x) \, dx + \varepsilon \leq a + \varepsilon
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Dall'arbitrarietà di  $\varepsilon$  segue la 1.2.

□

**Corollario 1.1.7.** *Una successione  $(x_n)$  è u.d. in  $[0, 1]$  se e soltanto se per ogni funzione  $f$  integrabile secondo Riemann vale la 1.3.*

*Dimostrazione.*

Supponiamo che la 1.3 vale per ogni funzione integrabile secondo Riemann. Essendo che ogni funzione continua è integrabile secondo Riemann, dal teorema 1.1.6 concludiamo che la successione  $(x_n)$  è u.d. in  $[0, 1]$ .

La rimanente implicazione la otterremo procedendo come nella prima parte del precedente teorema. Fissato  $\varepsilon > 0$ , esistono due funzioni semplici  $h_1$  e  $h_2$  tali che valgono le seguenti:

$$\begin{aligned}
h_1(x) &\leq f(x) \leq h_2(x), \quad \forall x \in [0, 1] \\
\int_0^1 [h_2(x) - h_1(x)] \, dx &\leq \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Allora esiste  $\overline{N}$  tale che per  $N > \overline{N}$  si ha:

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N h_k(x_n) - \int_0^1 h_k(x) \, dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

per  $k = 1, 2$ .

Da ciò segue che per  $N > \bar{N}$  si ha:

$$\begin{aligned} \int_0^1 h_1(x) dx - \frac{\varepsilon}{2} &< \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N h_1(x_n) \leq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n) \\ &\leq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N h_2(x_n) < \int_0^1 h_2(x) dx + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Giacchè vale anche:

$$\int_0^1 h_1(x) dx \leq \int_0^1 f(x) dx \leq \int_0^1 h_2(x) dx$$

si ha la tesi. □

**Teorema 1.1.8.** *La famiglia  $\mathcal{B}$  delle funzioni caratteristiche di tutti gli intervalli binari  $[\frac{h-1}{2^s}, \frac{h}{2^s}]$  con  $s \in \mathbb{N}$  e  $1 \leq h \leq 2^s$  è determinante.*

*Dimostrazione.*

Sia  $(x_k)$  una successione di punti in  $[0, 1]$ . Osserviamo che ogni  $f \in \mathcal{B}$  è una funzione integrabile secondo Riemann e supponiamo che  $(x_k)$  sia u.d. allora per il corollario 1.1.7 risulta:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(x_k) = \int_0^1 f(t) dt, \quad \forall f \in \mathcal{B} \quad (1.8)$$

Mostriamo ora che se vale la 1.8 allora la successione  $(x_k)$  è u.d. in  $[0, 1]$ , cioè dobbiamo verificare che per ogni  $c \in ]0, 1[$  si ha:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \chi_{[0,c]}(x_k) = c \quad (1.9)$$

Fissati  $c \in ]0, 1[$  e  $s \in \mathbb{N}$ , scegliamo un intero  $\bar{k}$  tale che  $\frac{\bar{k}-1}{2^s} \leq c \leq \frac{\bar{k}}{2^s}$  allora per  $N \leq s$  otteniamo:

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{\bar{k}-1} \chi_{[\frac{j-1}{2^s}, \frac{j}{2^s}]}(x_k) \leq \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \chi_{[0,c]}(x_k) \leq \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{\bar{k}} \chi_{[\frac{j-1}{2^s}, \frac{j}{2^s}]}(x_k)$$



che scambiando l'ordine delle sommatorie diviene:

$$\sum_{j=1}^{\bar{k}-1} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \chi_{\left[\frac{j-1}{2^s}, \frac{j}{2^s}\right]}(x_k) \leq \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \chi_{[0,c]}(x_k) \leq \sum_{j=1}^{\bar{k}} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \chi_{\left[\frac{j-1}{2^s}, \frac{j}{2^s}\right]}(x_k) \quad (1.10)$$

Utilizzando la 1.8 abbiamo inoltre:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\bar{k}-1} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \chi_{\left[\frac{j-1}{2^s}, \frac{j}{2^s}\right]}(x_k) = \sum_{j=1}^{\bar{k}-1} \frac{1}{2^s} = \frac{\bar{k}-1}{2^s}$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\bar{k}} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \chi_{\left[\frac{j-1}{2^s}, \frac{j}{2^s}\right]}(x_k) = \sum_{j=1}^{\bar{k}} \frac{1}{2^s} = \frac{\bar{k}}{2^s}$$

allora dalla 1.10 segue la 1.9. □

**Proposizione 1.1.9.** *La famiglia  $\mathcal{G}$  di tutte le funzioni  $g$  continue su  $[0, 1]$  tali che  $g(0) = g(1)$  è determinante.*

*Dimostrazione.*

Sia  $a \in [0, 1]$ , allora esistono due funzioni  $g_1, g_2 \in \mathcal{G}$ , tali che:

$$\int_0^1 (g_2(x) - g_1(x)) dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sostituendo nella dimostrazione del corollario 1.1.7  $h_1$ ,  $h_2$  e  $f$  con  $g_1$ ,  $g_2$  e  $\chi_{[0,1]}$  rispettivamente, otteniamo la tesi.

L'altra implicazione è banale, essendo la famiglia delle funzioni continue determinante. □

## 1.1.2 Criterio di Weyl

Consideriamo ora le funzioni  $f(x) = e^{2\pi i h x}$ , dove  $h \in \mathbb{Z}$  è un intero diverso da zero. Le funzioni  $f$  soddisfano le ipotesi della proposizione 1.1.9,

per tanto se  $(x_n)$  è una successione u.d. allora la relazione 1.3 è soddisfatta per le  $f$ . Uno degli aspetti più importanti della teoria della distribuzione uniforme è che funzioni di questo tipo forniscono anche un criterio sufficiente a determinare se una successione è u.d..

**Teorema 1.1.10** (Criterio di Weyl). *La successione  $(x_n)$  è u.d. se e solo se*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2\pi i h x_n} = 0 \quad (1.11)$$

per ogni intero  $k \neq 0$ .

*Dimostrazione.*

Sia  $(x_n)$  una successione u.d., allora utilizzando la proposizione 1.1.9 otteniamo:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2\pi i h x_n} = \int_0^1 e^{2\pi i h x} dx = \frac{e^{2\pi i h x}}{2\pi i h} \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{e^{2\pi i h} - 1}{2\pi i h} = 0.$$

Mostriamo il viceversa e supponiamo innanzitutto che  $(x_n)$  soddisfa la proprietà 1.11. Sia  $f$  una qualunque funzione continua su  $[0, 1]$  con  $f(0) = f(1)$ , allora per ottenere la tesi basta provare che per tale  $f$  è vera la 1.3. Per il teorema di approssimazione di Weirstrass, fissato  $\varepsilon > 0$ , esiste un polinomio trigonometrico  $\psi(x)$ , (cioè una combinazione lineare finita, a coefficienti complessi, di funzioni del tipo  $e^{2\pi i h x}$  con  $h \in \mathbb{Z}$ ) tale che:

$$\sup_{0 \leq x \leq 1} |f(x) - \psi(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Allora si ha che:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n) \right| &\leq \left| \int_0^1 (f(x) - \psi(x)) dx \right| + \left| \int_0^1 \psi(x) dx \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \psi(x_n) \right| + \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (\psi(x_n) - f(x_n)) \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \left| \int_0^1 \psi(x) dx - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \psi(x_n) \right| + \frac{\varepsilon}{3} \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

Osserviamo che l'ultima disuguaglianza è vera per valori di  $N$  maggiori di un appropriato  $N_0$ .

□

Questo fondamentale criterio fu mostrato per la prima volta da Weyl in [23] e in [24]. Pur essendo diverse le dimostrazioni che si trovano in letteratura, la maggior parte di esse seguono la linea originale di Weyl così come nel nostro caso. Il criterio di Weyl trova svariate applicazioni non solo nella teoria dell'uniforme distribuzione ma anche nello studio delle serie di potenze e nella stima di somme esponenziali.

Naturalmente ci occuperemo soltanto di alcune **applicazioni del criterio di Weyl** 1.1.10 a speciali successioni:

1. Sia  $\theta$  un numero irrazionale, allora la successione  $(n\theta)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , è u.d. mod 1.

Infatti:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^N e^{2\pi i h \theta n} \right| &= \left| \sum_{n=0}^N (e^{2\pi i h \theta})^n - 1 \right| = \left| \frac{1 - (e^{2\pi i h \theta})^{N+1} - 1 + e^{2\pi i h \theta}}{1 - e^{2\pi i h \theta}} \right| \\ &= |e^{2\pi i h \theta}| \left| \frac{1 - e^{2\pi i h \theta N}}{1 - e^{2\pi i h \theta}} \right| = \left| \frac{1 - e^{2\pi i h \theta N}}{1 - e^{2\pi i h \theta}} \right| \end{aligned} \quad (1.12)$$

Posto  $\alpha = \pi h \theta$  osserviamo che:

$$\begin{aligned} |1 - e^{2i\alpha}| &= |1 - \cos(2\alpha) - i \sin(2\alpha)| = \sqrt{(1 - \cos(2\alpha))^2 + (\sin(2\alpha))^2} \\ &= \sqrt{2(1 - \cos(2\alpha))} = \sqrt{2(1 - \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)} = 2|\sin \alpha| \end{aligned}$$

Allora dalla 1.12 si ottiene che:

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2\pi i h \theta n} \right| = \frac{1}{N} \left| \frac{1 - e^{2\pi i h \theta N}}{1 - e^{2\pi i h \theta}} \right| = \frac{1}{N} \frac{|1 - e^{2\pi i h \theta N}|}{2|\sin(\pi h \theta)|} \leq \frac{1}{N|\sin(\pi h \theta)|}$$

Essendo soddisfatta la 1.11, possiamo applicare il criterio di Weyl 1.1.10, da cui segue la tesi 1.

2. Sia  $\theta = 0.123456789101112\dots$ . La successione  $(\{10^n\theta\})$  è densa in  $[0, 1]$ .

Dall'esempio precedente segue che la successione  $(n\theta)$  è u.d. mod 1, essendo  $\theta$  irrazionale, e quindi risulta che la successione  $(\{n\theta\})$  è densa in  $[0, 1]$ . Consideriamo ora la sottosuccessione  $(\{10^n\theta\})$  e sia  $\alpha = 0.a_1a_2\dots a_k \in ]0, 1[$ . Allora esiste  $n \in \mathbb{N}$  tale che:

$$\{10^n\theta\} = 0.a_1a_2\dots a_k \underbrace{000\dots 00}_r a_{k+r+1}\dots$$

perciò si ha:

$$0 < \{10^n\theta\} - \alpha = 0.\underbrace{00\dots 000}_k \underbrace{000\dots 00}_r a_{k+r+1}\dots < 10^{-k-r}$$

dunque  $(\{10^n\theta\})$  è densa in  $[0, 1]$ .

3. La successione  $(\log n)$  non è u.d. mod 1.

Sia  $F$  una funzione a valori complessi con derivata continua su  $[1, N]$ , dove  $N \in \mathbb{N}$  e  $N > 1$ . Per ottenere il controesempio cercato usiamo la formula di sommazione di Eulero:

$$\sum_{n=1}^N F(n) = \int_1^N F(t) dt + \frac{1}{2}(F(1) + F(N)) + \int_1^N \left(\{t\} - \frac{1}{2}\right) F'(t) dt \quad (1.13)$$

Consideriamo  $F(n) = e^{2\pi i \log n}$  allora la 1.13 diventa:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2\pi i \log n} &= \frac{1}{N} \int_1^N e^{2\pi i \log t} dt + \frac{1}{2N}(1 + e^{2\pi i \log N}) \\ &+ \frac{1}{N} \int_1^N \left(\{t\} - \frac{1}{2}\right) \frac{2\pi i}{t} e^{2\pi i \log t} dt \quad (1.14) \end{aligned}$$

Studiamo separatamente i tre termini della 1.14 per  $N \rightarrow \infty$ :

- effettuando il cambio di variabili  $x = \log t$  il primo termine diventa:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \int_1^N e^{2\pi i \log t} dt &= \frac{1}{N} \int_0^{\log N} e^{(2\pi i + 1)x} dx \\ &= \frac{e^{(2\pi i + 1) \log N} - 1}{N(2\pi i + 1)} \\ &= \frac{Ne^{2\pi i \log N} - 1}{N(2\pi i + 1)} \rightarrow \infty \end{aligned}$$

- il secondo termine tende banalmente a zero
- consideriamo il modulo del terzo termine:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{N} \int_1^N \left( \{t\} - \frac{1}{2} \right) \frac{2\pi i}{t} e^{2\pi i \log t} dt \right| &\leq \frac{1}{N} \int_1^N \frac{2\pi}{t} \left| \{t\} - \frac{1}{2} \right| \left| i e^{2\pi i \log t} \right| dt \\ &\leq \frac{\pi}{N} \int_1^N \frac{dt}{t} = \frac{\pi \log N}{N} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Allora dalla 1.14 si ha che:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2\pi i \log n} = \infty$$

dunque per  $h = 1$  e  $x_n = \log n$  la condizione 1.11 non è verificata. Dal criterio di Weyl segue pertanto che la successione  $(\log n)$  non è u.d. mod 1.

**Osservazione 1.1.11.** *Il fatto che la successione  $(n\theta)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , è u.d. mod 1, per  $\theta$  irrazionale fu stabilito in maniera indipendente da Weyl [23], [24], Bohl [2] e Sierpinski [18] intorno al 1909-1910. Lo studio di questa particolare successione segna l'inizio della teoria dell'uniforme distribuzione e ha le sue radici nella teoria delle perturbazioni astronomiche. Il risultato 1 migliorava un teorema di Kronecker, il quale aveva dimostrato che la successione  $(n\theta)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , è densa in  $[0, 1]$ .*

Un'altra conseguenza del criterio di Weyl è il teorema di Fejér che ci consente di determinare molte classi di successioni uniformemente distribuite. Mostriamo preliminarmente un lemma.

**Lemma 1.1.12.** *Per ogni coppia di numeri reali  $u$  e  $v$  risulta:*

$$|e^{2\pi i u} - e^{2\pi i v} - 2\pi(u-v)e^{2\pi i v}| \leq 2\pi^2(u-v)^2 \quad (1.15)$$

*Dimostrazione.*

Integrando per parti  $\int_0^{u-v} (u-v-w)e^{2\pi i w} dw$  e maggiorando opportunamente otteniamo infatti:

$$\begin{aligned} |e^{2\pi i u} - e^{2\pi i v} - 2\pi(u-v)e^{2\pi i v}| &= |e^{2\pi i v}| |e^{2\pi i(u-v)} - 1 - 2\pi i(u-v)| \\ &= 4\pi^2 \left| \int_0^{u-v} (u-v-w)e^{2\pi i w} dw \right| \\ &\leq 4\pi^2 \int_0^{u-v} (u-v-w) dw \\ &= 4\pi^2 \left[ (u-v)w - \frac{w^2}{2} \right] \Big|_{w=0}^{w=u-v} \\ &= 4\pi^2 \frac{(u-v)^2}{2} \\ &= 2\pi^2(u-v)^2 \end{aligned}$$

□

**Teorema 1.1.13.** *Sia  $(f(n))$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , una successione di numeri reali tali che la successione  $\Delta f(n) = f(n+1) - f(n)$  è monotona al crescere di  $n$ . Supponiamo inoltre che:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta f(n) = 0 \quad e \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n\Delta f(n) = \infty \quad (1.16)$$

*Allora la successione  $(f(n))$  è u.d. mod 1.*

*Dimostrazione.*

Poniamo nella 1.15  $u = hf(n+1)$  e  $v = hf(n)$  con  $h \in \mathbb{Z}$  e  $h \neq 0$ . Dunque per  $n \geq 1$  abbiamo:

$$\left| e^{2\pi ihf(n+1)} - e^{2\pi ihf(n)} - 2\pi ih \Delta f(n) e^{2\pi ihf(n)} \right| \leq 2\pi^2 (\Delta f(n))^2$$

dividendo ambo i membri per  $|\Delta f(n)|$  risulta:

$$\left| \frac{e^{2\pi ihf(n+1)}}{\Delta f(n)} - \frac{e^{2\pi ihf(n)}}{\Delta f(n)} - 2\pi i h e^{2\pi ihf(n)} \right| \leq 2\pi^2 |\Delta f(n)|$$

Dalla relazione appena ottenuta segue:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{e^{2\pi ihf(n+1)}}{\Delta f(n+1)} - \frac{e^{2\pi ihf(n)}}{\Delta f(n)} - 2\pi i h e^{2\pi ihf(n)} \right| \\ & \leq \left| \frac{e^{2\pi ihf(n+1)}}{\Delta f(n+1)} - \frac{e^{2\pi ihf(n+1)}}{\Delta f(n)} \right| + \left| \frac{e^{2\pi ihf(n+1)}}{\Delta f(n)} - \frac{e^{2\pi ihf(n)}}{\Delta f(n)} - 2\pi i h e^{2\pi ihf(n)} \right| \\ & \leq \left| \frac{1}{\Delta f(n+1)} - \frac{1}{\Delta f(n)} \right| + 2\pi^2 |\Delta f(n)| \end{aligned} \quad (1.17)$$

per  $n \geq 1$ .

Quindi otteniamo la stima:

$$\begin{aligned} & \left| 2\pi i h \sum_{n=1}^{N-1} e^{2\pi ihf(n)} \right| \\ & = \sum_{n=1}^{N-1} \left( 2\pi i h e^{2\pi ihf(n)} - \frac{e^{2\pi ihf(n+1)}}{\Delta f(n+1)} + \frac{e^{2\pi ihf(n)}}{\Delta f(n)} \right) + \frac{e^{2\pi ihf(N)}}{\Delta f(N)} - \frac{e^{2\pi ihf(1)}}{\Delta f(1)} \Big| \\ & \leq \sum_{n=1}^{N-1} \left| 2\pi i h e^{2\pi ihf(n)} - \frac{e^{2\pi ihf(n+1)}}{\Delta f(n+1)} + \frac{e^{2\pi ihf(n)}}{\Delta f(n)} \right| + \left| \frac{e^{2\pi ihf(N)}}{\Delta f(N)} \right| + \left| \frac{e^{2\pi ihf(1)}}{\Delta f(1)} \right| \\ & \leq \sum_{n=1}^{N-1} \left| \frac{1}{\Delta f(n)} - \frac{1}{\Delta f(n+1)} \right| + \sum_{n=1}^{N-1} 2\pi^2 h^2 |\Delta f(n)| + \frac{1}{|\Delta f(N)|} + \frac{1}{|\Delta f(1)|} \end{aligned}$$

dove abbiamo usato la 1.17 nell'ultimo passaggio.

Sfruttando l'ipotesi di monotonicità di  $\Delta f(n)$ , dalla relazione precedente

abbiamo:

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{n=1}^{N-1} e^{2\pi i h f(n)} \right| &\leq \frac{1}{2\pi|h|} \left( \frac{1}{|\Delta f(N)|} + \frac{1}{|\Delta f(1)|} \right) + \frac{1}{2\pi|h|} \left| \frac{1}{|\Delta f(N)|} - \frac{1}{|\Delta f(1)|} \right| \\
&+ \pi|h| \sum_{n=1}^{N-1} |\Delta f(n)| \\
&\leq \frac{1}{\pi|h|} \left( \frac{1}{|\Delta f(N)|} + \frac{1}{|\Delta f(1)|} \right) + \pi|h| \sum_{n=1}^{N-1} |\Delta f(n)|
\end{aligned}$$

Allora:

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N-1} e^{2\pi i h f(n)} \right| \leq \frac{1}{\pi|h|} \left( \frac{1}{N|\Delta f(N)|} + \frac{1}{N|\Delta f(1)|} \right) + \frac{\pi|h|}{N} \sum_{n=1}^{N-1} |\Delta f(n)|$$

e perciò, tenendo conto delle ipotesi 1.16 si ha la tesi.  $\square$

**Corollario 1.1.14** (Teorema di Fejér). *Sia  $f(x)$  una funzione definita e differenziabile per  $x \geq 1$ . Se valgono:*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0 \quad \text{monotonicamente} \quad (1.18)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n|f'(x)| = \infty \quad (1.19)$$

allora la successione  $(f(n))$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , è u.d. mod 1.

*Dimostrazione.*

Per il teorema del valor medio esiste  $\tau_n \in [n, n+1]$  tale che:

$$\Delta f(n) = f'(\tau_n) \cdot 1 = f'(\tau_n)$$

Dall'ipotesi 1.18, segue che  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta f(n) = 0$  in maniera monotona.

Per mostrare che  $\Delta f(n)$  soddisfa le ipotesi del teorema 1.1.13, resta da verificare che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\Delta f(n) = \infty \quad (1.20)$$

A tale scopo, consideriamo per semplicità  $f \geq 0$ , allora risulta:

$$(n+1)f'(n+1) - f'(n+1) = nf'(n+1) \leq nf'(\tau_n) \leq nf'(n)$$



Passando al limite la precedente relazione, dalle ipotesi 1.18 e 1.19, si ha la 1.20. Allora possiamo applicare il teorema 1.1.13 e ottenere così la tesi. □

**Esempi 1.1.15.**

- $(\alpha n^\sigma \log^\tau n)$ , per  $n \geq 2$ , con  $0 < \sigma < 1$  e  $\tau \geq 0$ .

Infatti posto  $f'(n) = \alpha n^\sigma \log^\tau n$  si ha che:

$$f'(n) = \alpha \sigma n^{\sigma-1} \log^\tau n + \frac{\alpha n^\sigma \tau \log^{\tau-1} n}{n} = \alpha n^{\sigma-1} [\log^\tau n + \tau \log^{\tau-1} n] \rightarrow 0$$

$$n|f'(n)| = \alpha n^\sigma [\log^\tau n + \tau \log^{\tau-1} n] \rightarrow \infty$$

per  $n \rightarrow \infty$ . In sostanza sono soddisfatte le ipotesi del corollario 1.1.14 e perciò la successione di partenza è u.d. mod 1.

- $(\alpha \log^\tau n)$ , per  $n \geq 1$ , con  $\alpha > 0$  e  $\tau > 1$ .

Sia  $g(n) = \alpha \log^\tau n$ , allora possiamo applicare il teorema di Fejér essendo:  $g'(n) = \frac{\alpha \tau \log^{\tau-1} n}{n} \rightarrow 0$  e  $ng'(n) = \alpha \tau \log^{\tau-1} n \rightarrow \infty$  per  $n \rightarrow \infty$ .

- $(\alpha n \log^\tau n)$ , per  $n \geq 2$ , con  $\alpha < 0$  e  $\tau < 0$ .

Indichiamo con  $h(n)$  il termine generale della successione e verifichiamo che anche in questo caso il teorema di Fejer è applicabile.

$$h'(n) = \alpha \log^\tau n + \alpha \tau \log^{\tau-1} n \rightarrow 0 \text{ e } nh'(n) = \frac{\alpha n}{\log^{-\tau} n} + \frac{\alpha \tau}{\log^{1-\tau} n} \rightarrow \infty$$

Per una trattazione completa sulla teoria dell'uniforme distribuzione si faccia riferimento a [12].

## 1.2 Costruzione di successioni di punti uniformemente distribuite sull'intervallo unitario

In questa sezione analizzeremo alcuni metodi che ci consentono di costruire successioni uniformemente distribuite di punti nell'intervallo unitario. Queste costruzioni su  $[0, 1]$  costituiscono il fondamento del procedimento più generale (paragrafo 3.2.2) che ci permette di generare successioni di punti u.d. su insiemi che non sono necessariamente intervalli.

Mostriamo innanzitutto il seguente risultato.

**Proposizione 1.2.1.** *Sia  $(x_n)$  una successione u.d. e supponiamo che la successione  $(y_n)$  soddisfi:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - y_n| = 0 \quad (1.21)$$

Allora anche  $(y_n)$  è u.d.

*Dimostrazione.*

Fissiamo  $a \in ]0, 1[$  e  $\varepsilon$  tale che:  $0 < \varepsilon < \min \{a, 1 - a\}$ . Allora per l'ipotesi 1.21 esiste  $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$  tale che  $|x_n - y_n| < \varepsilon$ ,  $\forall n \geq N_\varepsilon$ .

Ne segue che se  $n \geq N_\varepsilon$ ,  $x_n < a - \varepsilon$  implica  $y_n < a$ , che a sua volta implica che  $x_n < a + \varepsilon$ . Infatti:

$$x_n < a - \varepsilon < a + x_n - y_n \Rightarrow y_n < a$$

$$\Rightarrow x_n - y_n + y_n < a + x_n - y_n$$

$$\Rightarrow x_n < a + x_n - y_n < a + \varepsilon$$

Pertanto risulta:

$$\begin{aligned}
a - \varepsilon &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N N_{\chi_{[0, a-\varepsilon]}}(x_n) \leq \varliminf_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N N_{\chi_{[0, a]}}(y_n) \\
&\leq \varlimsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N N_{\chi_{[0, a]}}(y_n) \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N N_{\chi_{[0, a+\varepsilon]}}(x_n) \\
&= a + \varepsilon
\end{aligned}$$

Essendo  $\varepsilon$  arbitrariamente piccolo si ha la tesi.  $\square$

### 1.2.1 Costruzione di Knapowski

Consideriamo gli intervalli  $J_h^s = \left[ \frac{h-1}{s}, \frac{h}{s} \right[$  con  $h = 1, 2, \dots, s$  e  $s \in \mathbb{N}$ . Disponiamo questi intervalli nella successione  $(J_n)$  secondo l'ordine lessicografico, cioè  $J_h^s$  segue  $J_k^r$  se  $s > r$  oppure se  $s = r$  e  $h > k$ .

Indichiamo con  $x_n$  l'estremo sinistro dell'intervallo  $J_n$ , costruendo così la successione di Knapowski [10]:

$$0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \dots$$

**Proposizione 1.2.2.** *La successione  $(x_n)$  costruita tramite la procedura di Knapowski è uniformemente distribuita.*

*Dimostrazione.*

Fissato  $c \in ]0, 1[$ , vogliamo mostrare che vale:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \chi_{[0, c]}(x_k) = c$$

Preso un intero  $n \in \mathbb{N}$  denotiamo con  $n_c$  l'unico intero tale che:

$$\frac{n_c}{n} \leq c < \frac{n_c + 1}{n} \tag{1.22}$$

Per come è stata costruita la successione, al passo generico  $m$  vengono aggiunti esattamente  $m$  punti, allora possiamo scrivere  $N$  come:

$N = 2 + 3 + \dots + M + r$  con  $0 \leq r \leq M$ , cioè  $N = \frac{(M+2)(M-1)}{2} + r$ .

Dunque risulta:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \chi_{[0,c]}(x_k) &= \frac{1}{N} \left[ \sum_{k=1}^2 \chi_{[0,c]}(x_k) + \dots + \sum_{k=N-r-M+1}^{N-r} \chi_{[0,c]}(x_k) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=N-r+1}^N \chi_{[0,c]}(x_k) \right] \\ &= \frac{1}{N} (2_c + \dots + M_c) + \frac{1}{N} \sum_{k=N-r+1}^N \chi_{[0,c]}(x_k) \end{aligned} \quad (1.23)$$

Osserviamo che per  $M \rightarrow \infty$ :

$$\frac{1}{N} \sum_{k=N-r+1}^N \chi_{[0,c]}(x_k) \leq \frac{r}{N} \leq \frac{M}{2+3+\dots+M} \leq \frac{2M}{(M+2)(M-1)} \rightarrow 0 \quad (1.24)$$

Inoltre si ha:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} (2_c + \dots + M_c) &= \frac{2+3+\dots+M}{2+3+\dots+M+r} \cdot \frac{1}{2+3+\dots+M} (2_c + \dots + M_c) \\ &= \frac{2+\dots+M}{2+\dots+M+r} \cdot \frac{1}{2+\dots+M} \left( 2 \cdot \frac{2_c}{2} + \dots + M \cdot \frac{M_c}{M} \right) \\ &= \frac{2+\dots+M}{2+\dots+M+r} \cdot \frac{1}{2+\dots+M} \left( \underbrace{\frac{2_c}{2} + \frac{2_c}{2} + \dots + \frac{2_c}{2}}_{2\text{volte}} + \dots + \right. \\ &\quad \left. + \underbrace{\frac{M_c}{M} \dots + \frac{M_c}{M}}_{M\text{volte}} \right) \end{aligned} \quad (1.25)$$

Passando al limite la relazione 1.25 per  $M \rightarrow \infty$ , si ha che il termine generale  $\frac{M_c}{M}$  tende a  $c$ , poichè dalla 1.22 si ha che  $0 \leq c - \frac{M_c}{M} \leq \frac{1}{M}$ , e dunque per il teorema sul limite della media otteniamo:

$$\frac{1}{N} (2_c + \dots + M_c) \rightarrow c \quad (1.26)$$

In definitiva da 1.23, 1.24 e 1.26 si ha la tesi. □

Tenendo conto della proposizione 1.2.1, possiamo concludere che se per ogni  $n \in \mathbb{N}$  scegliamo un punto  $y_n \in J_n$ , allora anche la successione  $(y_n)$  è u.d.. La proposizione 1.2.1 costituisce un metodo efficace per generare successioni u.d. a partire da una successione di cui è già nota l'uniforme distribuzione, tuttavia ne esistono altri. Ad esempio data una successione u.d., togliendo o aggiungendo un numero finito di termini si ottengono successioni ancora u.d.. A questo punto è spontaneo chiedersi cosa accade all'uniforme distribuzione di una successione se vi inseriamo o cancelliamo infiniti termini. In generale, dopo queste operazioni che coinvolgono infiniti termini, non si ottengono successioni che sono ancora u.d. ma esistono casi particolari in cui ciò si verifica.

**Definizione 1.2.3.** *Sia  $(N_k)$  una successione crescente di interi positivi. Si dice che  $(N_k)$  ha densità zero se:*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{K(N)}{N} = 0$$

dove  $K(N)$  indica il numero di termini  $N_k$  tali che  $N_k \leq N$ .

**Proposizione 1.2.4.** *Se  $(x_n)$  è una successione u.d. e  $(y_n)$  è una successione che coincide con  $(x_n)$  tranne che per un insieme di indici aventi densità zero, allora  $(y_n)$  è u.d..*

*Dimostrazione.*

Indichiamo con  $(N_k)$  la sottosuccessione degli indici  $n$  per i quali  $x_n \neq y_n$ .

Per ogni  $a \in ]0, 1[$  allora si ottiene:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \chi_{[0,a]}(x_n) - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \chi_{[0,a]}(y_n) \right| &\leq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{K(N)} |\chi_{[0,a]}(x_{N_k}) - \chi_{[0,a]}(y_{N_k})| \\ &\leq \frac{2K(N)}{N} \end{aligned}$$

e quindi la tesi, per la definizione 1.2.3.

□

Analogamente possiamo mostrare che l'uniforme distribuzione si conserva se da una successione u.d. estraiamo o inseriamo un'infinità di termini i cui indici costituiscono un insieme di densità zero. Un'altro risultato molto interessante è dovuto a von Neumann [22].

**Teorema 1.2.5.** *Se  $(z_k)$  è una successione densa in  $[0, 1]$ , allora è possibile riordinarla in modo tale che essa risulti essere u.d..*

*Dimostrazione.*

Consideriamo la successione di intervalli  $(J_n)$  generata dalla costruzione di Knapowski. Poniamo  $x_n = z_{k_n}$  il punto della successione  $(z_k)$ , avente l'indice più piccolo, che appartiene a  $J_n$  e che è diverso dai precedenti punti  $z_{k_m}$  con  $m < n$ . Un punto che soddisfa queste condizioni esiste sempre per l'ipotesi di densità della successione  $(z_k)$ . Per la proposizione 1.2.1 la successione  $(x_n)$  è u.d.. I punti che non sono stati presi in considerazione nella procedura di costruzione della  $(x_n)$  possono essere inseriti nella stessa successione senza lederne l'uniforme distribuzione, poichè possiamo confinare i loro indici in un insieme che ha densità zero. Con quest'ultimo accorgimento la successione  $(x_n)$ , che abbiamo mostrato essere u.d., non è altro che un riordinamento della successione iniziale  $(z_n)$ .

□

## 1.2.2 Successione "mille foglie"

La costruzione di Knapowski induce, in modo naturale, a studiare altre successioni di decomposizioni dell'intervallo unitario. Prendiamo in considerazione la successione delle ripartizioni binarie, che possiede una caratteristica

vantaggiosa: ogni decomposizione è un raffinamento della precedente.

Sia  $I_h^s = [\frac{h-1}{2^s}, \frac{h}{2^s}[$  per  $1 \leq h \leq 2^s$  e  $s \in \mathbb{N}$ . Se disponiamo questi intervalli nell'ordine lessicografico e indichiamo con  $x_n$  l'estremo sinistro di ciascuno di essi non otteniamo una successione u.d..

Infatti se consideriamo i punti generati dalle prime  $n$  decomposizioni cioè se prendiamo  $N = 2 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 2$ , allora in  $[0, \frac{1}{2}[$  troviamo esattamente  $(2^n - 1)$  punti della successione  $(x_n)$ . In questo caso  $[0, \frac{1}{2}[$  e  $[\frac{1}{2}, 1[$  contengono lo stesso numero di  $x_n$ .

Se consideriamo anche i successivi  $2^n$  punti della decomposizione successiva in  $2^{n+1}$  parti uguali, allora essi appartengono tutti a  $[0, \frac{1}{2}[$ ; dunque quest'ultimo contiene il doppio degli  $x_n$  che si trovano in  $[\frac{1}{2}, 1[$ . In sostanza se prendiamo  $N = 2 + 2^2 + \dots + 2^n + 2^n = 2^{n+1} + 2^n - 2 = 3 \cdot 2^n - 2$ , allora in  $[0, \frac{1}{2}[$  ci sono  $(2 \cdot 2^n - 1)$  punti della successione  $(x_n)$ .

Dalle considerazioni fatte possiamo concludere che:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \chi_{[0, \frac{1}{2}[}(x_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 1}{2^{n+1} - 2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \chi_{[0, \frac{1}{2}[}(x_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 2^n - 1}{3 \cdot 2^n - 2} = \frac{2}{3}$$

dunque non esiste il

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \chi_{[0, \frac{1}{2}[}(x_k)$$

e pertanto la successione  $(x_n)$  non è u.d..

Tuttavia riordinando la successione degli intervalli binari in maniera diversa otteniamo una successione u.d.. Chiameremo il nuovo ordinamento per gli intervalli  $I_h^s$  ordine "mille foglie". Secondo quest'ordine  $I_h^s$  viene prima di  $I_k^r$  se  $s < r$  ma per  $s = r$  disponiamo i  $2^s$  punti del tipo  $\frac{h}{2^s}$  per  $1 \leq h \leq 2^s$  in modo differente rispetto all'ordine lessicografico. Infatti siano:

$$I_0 = [0, 1], \quad I_1 = \left[0, \frac{1}{2}\right[ \quad e \quad I_2 = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

I successivi quattro intervalli li sistemiamo nell'ordine indotto da  $I_1$  e  $I_2$ :

$$I_3 = \left[0, \frac{1}{4}\right[ , I_4 = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right[ I_5 = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right[ e I_6 = \left[\frac{3}{4}, 1\right]$$

Analogamente al passo successivo gli otto intervalli generati saranno disposti prendendo prima le metà sinistre dei precedenti quattro e poi le metà destre nello stesso ordine, cioè:

$$I_7 = \left[0, \frac{1}{8}\right[ , I_8 = \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{8}\right[ I_9 = \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{8}\right[ , I_{10} = \left[\frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right[ ,$$

$$I_{11} = \left[\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right[ , I_{12} = \left[\frac{5}{8}, \frac{3}{4}\right[ , I_{13} = \left[\frac{3}{8}, \frac{1}{2}\right[ , I_{14} = \left[\frac{7}{8}, 1\right]$$

Procedendo in questo ordine, otteniamo una successione di intervalli che indichiamo con  $(I_n)$ . Sia  $x_n$  l'estremo sinistro di ciascun  $I_n$  allora vale:

**Proposizione 1.2.6.** *La successione "mille foglie"  $(x_n)$  è uniformemente distribuita.*

*Dimostrazione.*

Sia  $\delta_n$  l'insieme dei punti  $\{0, \frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}, \dots, \frac{2^n-1}{2^n}\}$  che individuano la ripartizione binaria di  $[0, 1]$  al passo  $n$  opportunamente riordinati secondo l'ordine mille foglie. La successione degli  $(x_n)$  risulta essere esplicitamente:

$$\underbrace{0, \frac{1}{2}}_{\delta_1}, \underbrace{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}}_{\delta_2}, \underbrace{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{5}{8}, \frac{3}{8}, \frac{7}{8}}_{\delta_3}, \dots$$

Consideriamo un intervallo binario  $I_n = I_h^s$  per qualche  $s \in \mathbb{N}$  e qualche  $1 \leq h \leq 2^s$ , cioè  $I_n = \left[\frac{h-1}{2^s}, \frac{h}{2^s}\right[$ .

Siccome le funzioni caratteristiche degli intervalli binari costituiscono una famiglia determinante, come mostrato nel teorema 1.1.8, ci basta mostrare che:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \chi_{I_n}(x_k) = \frac{1}{2^s} \quad (1.27)$$



Sia ora  $N > 2^t$  con  $t > s$  generico.

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \chi_{I_n}(x_k) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^p \chi_{I_n}(x_k) + \frac{1}{N} \sum_{k=p+1}^N \chi_{I_n}(x_k) \quad (1.28)$$

dove  $p = 2 + \dots + 2^{t-2} + 2^{t-1} = 2^t - 2$  è il numero di  $x_k$  ottenuti dalle ripartizioni che precedono  $\delta_s$ .

Osserviamo che per  $k > 2^t - 2$  i punti  $x_k$  sono disposti in modo particolare a causa dell'ordine mille foglie. Infatti se raggruppiamo questi punti a  $2^s$  per volta, esattamente il  $(2^s - 2)$ -esimo punto di ogni gruppo appartiene all'intervallo  $I_n$ .

Ad esempio consideriamo  $I_n = I_{12}^4 = [\frac{11}{16}, \frac{12}{16}[$  e dunque  $s = 4$ . Risulta allora che al passo successivo in  $\delta_5$  ci sono 32 punti dei quali il quattordicesimo dei primi 16 e il quattordicesimo dei secondi 16 appartengono a  $I_n$ . Illustriamo questo esempio nella figura 1.1, dove abbiamo evidenziato l'intervallo  $I_n$  in questione e riportato i punti delle decomposizione binarie di  $[0, 1]$ , precisando l'ordine "mille foglie" secondo il quale ad ogni passo essi vengono disposti.

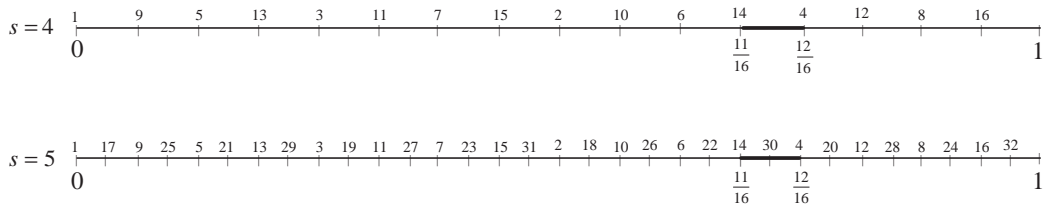


Figura 1.1: Esempio di ordinamento "mille foglie"

Alla luce di quanto appena osservato, possiamo scrivere  $N = (2^t - 2) + M2^s + d$

con  $0 \leq d < 2^s$  e  $M \in \mathbb{N}$  e dunque risulta:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \chi_{I_n}(x_k) &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{2^t-2} \chi_{I_n}(x_k) + \frac{1}{N} \sum_{k=2^t-2}^{N-d} \chi_{I_n}(x_k) + \frac{1}{N} \sum_{k=N-d+1}^N \chi_{I_n}(x_k) \\
&= \frac{2^t-2}{N} \cdot \frac{1}{2^t-2} \sum_{k=1}^{2^t-2} \chi_{I_n}(x_k) + \frac{M2^s}{N} \cdot \frac{1}{M2^s} \sum_{k=2^t-1}^{N-d} \chi_{I_n}(x_k) \\
&\quad + \frac{d}{N} \cdot \frac{1}{d} \sum_{k=N-d+1}^N \chi_{I_n}(x_k) \tag{1.29}
\end{aligned}$$

In definitiva passando al limite la 1.29 per  $n \rightarrow \infty$ , e dunque per  $t \rightarrow \infty$ , segue la tesi 1.27. □

### 1.2.3 Successioni di Van der Corput e di Halton

In realtà la successione "mille foglie" è un caso particolare di *successione di van der Corput*. Infatti, nel 1935, il matematico tedesco J.G. van der Corput fu il primo a pubblicare ([20]) una procedura che consente di generare successioni, tra cui la mille foglie, u.d. sull'intervallo unitario. La base della costruzione di van der Corput è la funzione radice inversa, pertanto diamone innanzitutto la definizione:

**Definizione 1.2.7.** *Siano  $b \geq 2$  un intero e  $n \in \mathbb{N}$ . Indichiamo con  $n = n_1 + n_2b + \dots + n_rb^{r-1}$  la rappresentazione in base  $b$  dell'intero  $n$ , dove chiaramente gli  $n_i \in \{0, \dots, b-1\}$ . La funzione radice inversa  $\varphi_b : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$  è definita come:*

$$\varphi_b(n) = \frac{n_1}{b} + \frac{n_2}{b^2} + \dots + \frac{n_r}{b^r}$$

Quando  $b$  è un numero primo la successione  $(\varphi_b(n))$  per  $n = 1, 2, \dots$  è detta successione di van der Corput.

Il metodo di van der Corput è, dunque, molto semplice. Schematizziamo la

procedura per  $b = 2$ :

$$\begin{aligned}
 1 &= 1.0 &\Rightarrow& 0.1 &= \frac{1}{2} \\
 2 &= 10.0 &\Rightarrow& 0.01 &= \frac{1}{4} \\
 3 &= 11.0 &\Rightarrow& 0.11 &= \frac{3}{4} \\
 4 &= 100.0 &\Rightarrow& 0.001 &= \frac{1}{8} \\
 5 &= 101.0 &\Rightarrow& 0.101 &= \frac{5}{8} \\
 6 &= 110.0 &\Rightarrow& 0.011 &= \frac{3}{8} \\
 7 &= 111.0 &\Rightarrow& 0.111 &= \frac{7}{8}
 \end{aligned}
 \tag{1.30}$$

e così via. In pratica la funzione radice inversa non fa altro che ribaltare le cifre dell'espressione di  $n$  in base 2, compreso lo zero decimale, e convertire il numero ottenuto in base 10. La successione di van der Corput per  $b = 2$  è:

$$0.1_2, 0.01_2, 0.11_2, 0.001_2, 0.101_2, 0.011_2, 0.111_2 \dots$$

cioè:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{5}{8}, \frac{3}{8}, \frac{7}{8}, \dots$$

che proprio la successione "mille foglie".

Ad esempio in base tre la successione di van der Corput è:

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{9}, \frac{4}{9}, \frac{7}{9}, \frac{2}{9}, \frac{5}{9}, \frac{8}{9}, \dots$$

Halton, successivamente, estese al caso  $k$ -dimensionale la procedura di van der Corput generando successioni di  $k$ -uple ciascuna definita come:

$$(\varphi_{b_1}(n), \varphi_{b_2}(n), \dots, \varphi_{b_k}(n))$$

dove le basi  $b_1, b_2, \dots, b_k$  sono numeri coprimi tra loro.

I punti della *successione di Halton* risultano essere uniformemente distribuiti in spazi multidimensionali e sono molto usate nelle applicazioni del metodo di Monte Carlo per fornire stime di integrali in dimensioni elevate ([7]).

## 1.3 Successioni di partizioni uniformemente distribuite

Volgiamo ora lo sguardo alle successioni di partizioni, definendo anche per esse il concetto di uniforme distribuzione e soprattutto analizzando il legame esistente tra successioni di partizioni e successioni di punti u.d., riferendoci al [21]. Dapprima diamo alcune definizioni basilari:

**Definizione 1.3.1.** *Una partizione  $\pi$  di  $[0, 1]$  è una collezione di intervalli determinati da un insieme di punti  $\{0, t_1, t_2, \dots, t_k, 1\}$  in ordine crescente.*

**Osservazione 1.3.2.** *Solitamente quando si parla di punti determinanti una partizione non si considerano i punti 0 e 1.*

**Definizione 1.3.3** (Convergenza debole). *Sia  $(\pi_n)$  una successione di partizioni, dove  $\pi_n = \{t_1^n, t_2^n, \dots, t_k^n\}$  con  $k = k(n)$ . Data una misura di probabilità  $\mu$ , si dice che la successione  $(\pi_n)$  converge debolmente a  $\mu$ , se per ogni funzione continua  $f$  su  $[0, 1]$  risulta:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k(n)} \sum_{i=1}^{k(n)} f(t_i^n) = \int_0^1 f(t) dt \quad (1.31)$$

**Definizione 1.3.4.** *Una successione di partizioni si dice uniformemente distribuita se converge debolmente alla misura di Lebesgue  $\lambda$ .*

**Osservazione 1.3.5.** *Dalla definizione si evince subito che se  $(\pi_n)$  è u.d. allora il numero di punti determinanti ciascun  $\pi_n$  tende ad infinito e che la lunghezza massima degli intervalli tende a zero.*

In questo lavoro identificheremo una partizione  $\pi$  con la misura di probabilità ottenuta come la media delle misure di Dirac concentrate nei punti determinanti  $\pi$ . In pratica se abbiamo la partizione  $\pi = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ , per

noi sar :

$$\pi = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{t_i}$$

dove  $\delta_{t_i}$  indica la misura di Dirac concentrata nel punto  $t_i$ .

Ne segue che se consideriamo la partizione  $\pi_n = \{t_1^n, t_2^n, \dots, t_k^n\}$  allora, data una funzione  $f$  continua, risulta:

$$\frac{1}{k(n)} \sum_{i=1}^{k(n)} f(t_i^n) = \int_0^1 f(t) d\pi_n$$

In seguito a questa identificazione possiamo dire che la successione di partizioni  $(\pi_n)$    u.d. se e solo se  $\pi_n \rightharpoonup \lambda$ , dove  $\rightharpoonup$  indica la convergenza debole di misure.

### 1.3.1 Relazione tra uniforme distribuzione di successioni di punti e di partizioni

La nozione di convergenza debole costituisce il collante tra le successioni u.d. di punti e le successioni u.d. di partizioni. Studiamo allora il legame che intercorre tra questi due concetti, focalizzando la nostra attenzione sul problema di associare ad una successione u.d. di punti una successione u.d. di partizioni e viceversa.

#### **Teorema 1.3.6.**

*Se  $(x_n)$    u.d. di punti tali che  $x_n \neq x_m$  per  $n \neq m$  e  $x_n \notin \{0, 1\}$ , allora la successione di partizioni  $(\pi_n)$ , dove ogni  $\pi_n$    determinata dai punti  $\{0, 1, x_k, k \leq n\}$ , in ordine crescente,   u.d..*

*Dimostrazione.*

La tesi 1.31 segue direttamente dall'ipotesi di uniforme distribuzione della successione  $(x_n)$  e dal teorema 1.1.6 che ci garantisce che la famiglia delle funzioni continue   determinante.  $\square$

**Osservazione 1.3.7.** *L'ipotesi che gli elementi della successione  $(x_n)$  siano distinti tra loro appare ragionevole se facciamo riferimento a molti degli esempi di successioni u.d. che abbiamo già costruito. Tuttavia questo presupposto si rivela addirittura essenziale e il seguente esempio ne è prova evidente.*

**Esempio 1.3.8.**

*Consideriamo la successione  $(x_n)$  definita da blocchi consecutivi di  $4m$  punti:  $\left\{ \frac{1}{2m+1}, \frac{1}{2m+1}, \frac{2}{2m+1}, \frac{2}{2m+1}, \dots, \frac{m}{2m+1}, \frac{m}{2m+1}, \dots, \frac{1}{2}, \frac{2m+1}{4m}, \frac{2m+2}{4m}, \dots, \frac{4m-1}{4m} \right\}$ ,  $m \in \mathbb{N}$ . In ogni blocco i primi  $m$  punti sono ripetuti ciascuno due volte, mentre gli altri sono distinti. In questo modo i punti della successione, pur avendo densità doppia nella metà destra di  $[0, 1]$ , hanno una distribuzione equilibrata grazie alle ripetizioni che compaiono nella metà sinistra. Pertanto risulta che la successione  $(x_n)$  è u.d..*

*Nel momento in cui prendiamo in considerazione la successione di partizioni  $(\pi_n)$  corrispondente a  $(x_n)$ , osserviamo subito che essa possiede in  $[\frac{1}{2}, 1]$  il doppio degli intervalli che ha in  $[0, \frac{1}{2}[$  e quindi non è u.d..*

Cerchiamo ora di stabilire una procedura che ci consenta di associare ad una successione u.d. di partizioni una successione u.d. di punti. Ci siamo già scontrati con le difficoltà che presenta questo secondo problema nel paragrafo 1.2.2. Infatti mentre è stato facile ricavare dalle partizioni generate dalla costruzione di Knapowski una successione u.d., per le decomposizioni binarie, è stato necessario compiere un passaggio in più per ottenere il risultato cercato. Come nel caso degli intervalli binari, così in generale, data una successione di partizioni  $(\pi_n)$  u.d., riordineremo opportunamente i punti determinanti ciascuna  $\pi_n$  in modo tale da garantire l'uniforme distribuzione della corrispondente successione di punti.

Indichiamo, come nel paragrafo 1.2.2, con  $I_k^s = [\frac{k-1}{2^s}, \frac{k}{2^s}[$  gli intervalli binari e con  $I_{k_j}^s$ , per  $1 \leq j \leq 2^s$ , il riordinamento "mille foglie" degli intervalli  $I_k^s$ . Sia

$\pi$  una partizione generica determinata dai punti  $\{0, t_1, \dots, t_m, 1\}$ . Fissato  $s$ , per  $1 \leq k \leq 2^s$  supponiamo che:

$$\left| \pi(I_k^s) - \frac{1}{2^s} \right| < \varepsilon$$

con  $\varepsilon < \frac{1}{2^s}$ .

Prendiamo  $m > 2^s$  e sistemiamo i punti  $t_i$  per  $1 \leq i \leq m$  nell'ordine indotto dall'ordine "mille foglie" sugli  $I_{k_j}^s$  con  $1 \leq j \leq 2^s$ . Per analogia chiameremo "mille foglie" anche questo riordinamento dei punti  $t_i$  e  $t_{i_j}$  i punti riordinati. Esplicitamente: il primo punto  $t_{i_1}$  è il più piccolo dei  $t_i$  in  $I_{k_1}^s$ , il secondo punto  $t_{i_2}$  è il più piccolo dei  $t_i$  in  $I_{k_2}^s$  e così via fino a  $t_{i_{2^s}}$  in  $I_{k_{2^s}}^s$ . Dopo aver scelto quest'ultimo punto, iteriamo questo procedimento selezionando il più piccolo punto tra i rimanenti in  $I_{k_1}^s$ , poi il più piccolo punto tra i rimanenti in  $I_{k_2}^s$  e andiamo avanti in questo modo fino all'esaurimento di tutti i  $t_i$ . Un importante accorgimento da osservare è quello di non scegliere mai un punto già selezionato in qualche passo precedente. Inoltre se in  $I_{k_r}^s$  sono stati selezionati tutti i punti, si passa a considerare il successivo  $I_{k_{r+1}}^s$ .

Per semplicità di notazione, indichiamo con  $(y_j)$  per  $1 \leq j \leq m$  la sequenza finita dei  $t_{i_j}$  ottenuta dal riordinamento dei  $t_i$ . Osserviamo che per  $N \leq m$  possiamo scrivere  $N = 2^s h + l$  dove  $h, l \in \mathbb{N}$  e  $0 \leq l \leq 2^s$  e si ha che:

$$\frac{h-1}{2^s h + l} \leq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \chi_{I_{k_j}^s}(y_i) \leq \frac{h}{2^s h + l}$$

poichè gli  $y_i$  cadono con periodicità in tutti gli intervalli  $I_{k_j}^s$ .

Allora si ha che:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \chi_{I_{k_j}^s}(y_i) = \frac{n_{k_j}}{n}$$

dove  $n_{k_j}$  è il numero di  $y_i$  che cadono nell'intervallo  $I_{k_j}^s$ .

Prima di dimostrare il teorema fondamentale mostriamo la validità del seguente lemma.

**Lemma 1.3.9.** *Sia  $(L_i)$  una successione di numeri reali positivi tale che  $\lim_{i \rightarrow \infty} L_i = L$ . Supponiamo inoltre che  $(n_i)$  sia una successione di interi positivi che soddisfa  $\lim_{i \rightarrow \infty} n_i = \infty$ . Allora:*

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{n_1 L_1 + \dots + n_i L_i}{n_1 + \dots + n_i} = L$$

*Dimostrazione.* Preso  $\varepsilon > 0$ , sia  $j_1 \in \mathbb{N}$  tale che  $|L_i - L| < \frac{\varepsilon}{2}$  per  $i > j_1$ . Posto poi  $K = \sup_i |L_i - L|$ , sia  $j_2 \in \mathbb{N}$  tale che:

$$\frac{n_1 + \dots + n_{j_1}}{n_1 + \dots + n_i} < \frac{\varepsilon}{2K}$$

per  $i > j_2$ . Valutiamo allora  $\left| \frac{n_1 L_1 + \dots + n_i L_i}{n_1 + \dots + n_i} - L \right|$  per  $i > j_2$ :

$$\begin{aligned} \left| \frac{n_1 L_1 + \dots + n_i L_i}{n_1 + \dots + n_i} - L \right| &= \left| \frac{n_1(L_1 - L) + \dots + n_{j_1}(L_{j_1} - L)}{n_1 + \dots + n_i} \right| \\ &+ \left| \frac{n_{j_1+1}(L_{j_1+1} - L) + \dots + n_i(L_i - L)}{n_1 + \dots + n_i} \right| \\ &\leq K \frac{n_1 + \dots + n_{j_1}}{n_1 + \dots + n_i} + \frac{\varepsilon n_{j_1+1} + \dots + n_i}{2 n_1 + \dots + n_i} < \varepsilon \end{aligned}$$

□

**Teorema 1.3.10.** *Se  $(\pi_i)$  è una successione di partizioni u.d., allora è possibile riordinare i punti  $\{t_1^s, t_2^s, \dots, t_{n(i)}^s\}$ , che determinano  $\pi_i$ , in modo tale che la corrispondente successione di punti in ordine lessicografico sia u.d..*

*Dimostrazione.*

Per  $s = 1$  sia  $m_1 \in \mathbb{N}$  tale che:

$$\left| \pi_m(I_k^1) - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{10^2}$$

per  $k = 1, 2$  e che:

$$\left| \frac{1}{m} \sum_{n=1}^m \pi_n(I_k^1) - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{10^2}$$



per ogni  $m \geq m_1$ .

In generale, per  $s > 1$  sia  $m_s > m_{s-1}$  tale che:

$$\left| \pi_m(I_k^s) - \frac{1}{2^s} \right| < \frac{1}{10^{s+1}} \quad (1.32)$$

per  $1 \leq k < 2^s$  e che:

$$\left| \frac{1}{m} \sum_{n=1}^m \pi_n(I_k^s) - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{10^{s+1}} \quad (1.33)$$

per ogni  $m \geq m_s$ .

Osserviamo che la 1.32 è vera per l'ipotesi di uniforme distribuzione di  $(\pi_i)$  e che la 1.33 vale in virtù del teorema sul limite della media.

Posto  $m_0 = 1$ , per  $m_s \leq i < m_{s+1}$  disponiamo i punti determinanti ogni  $\pi_i$  secondo l'ordine "mille foglie", con la procedura che abbiamo descritto, prima del lemma 1.3.9, per gli intervalli binari. Siano  $t_j^i$  i punti riordinati e sia  $(x_n)$  la successione di questi punti messi in ordine lessicografico.

Essendo che la famiglia delle funzioni caratteristiche degli intervalli binari è determinante, basta dimostrare che:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \chi_{I_k^s}(x_i) = \frac{1}{2^s} \quad (1.34)$$

Poniamo:

$$A_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \chi_{I_k^s}(x_i)$$

e prendiamo  $N = N(m) = n(1) + \dots + n(m)$  dove ciascun  $n(i)$  è il numero dei punti che dettrminano  $\pi_i$ . Allora risulta che:

$$A_N = \frac{n(1)\pi_1(I_k^s) + \dots + n(m)\pi_m(I_k^s)}{n(1) + \dots + n(m)}$$

Allora per il lemma 1.3.9:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} A_N = \lim_{m \rightarrow \infty} \pi_m(I_k^s) = \frac{1}{2^s}$$

Resta dunque da mostrare che la 1.34 vale anche se partiamo da valori intermedi di  $N$ , cioè per  $N = N(m) + l$  con  $0 < l < n(m) + 1$ :

$$A_N = \frac{N(m)}{(N(m) + l)} \frac{1}{N(m)} \sum_{i=1}^{N(m)} \chi_{I_k^s}(x_i) + \frac{l}{(N(m) + l)} \sum_{i=N(m)+1}^N \chi_{I_k^s}(x_i)$$

In questo caso essendo  $A_N$  combinazione convessa di due termini che tendono a  $\frac{1}{2^s}$  si ha la 1.34. □

### 1.3.2 Partizioni di Kakutani

Presentiamo una particolare classe di successioni di partizioni di  $[0, 1]$  che fu introdotta da Kakutani [9] nel 1976.

Scegliamo un numero  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ , e poniamo  $\beta = 1 - \alpha$ .

Definiamo induttivamente, per  $n = 0, 1, \dots$ , gli insiemi:

$$\mathcal{K}^{(n)} = \left\{ x_i^{(n)} : i = 0, 1, \dots, m_n \right\}$$

costituiti da punti dell'intervallo unitario disposti in ordine crescente di indice cioè:  $0 = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \dots < x_{m_n}^{(n)} = 1$ .

Sia dunque  $\mathcal{K}^{(0)} = \{0, 1\}$ .  $\mathcal{K}^{(n+1)}$  è ottenuto da  $\mathcal{K}^{(n)}$  inserendo un nuovo punto  $x_{i-1}^{(n)} + \alpha \left( x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)} \right)$  soltanto in quegli intervalli  $\left[ x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)} \right]$  aventi lunghezza massima tra tutti quelli generati da coppie consecutive di punti di  $\mathcal{K}^{(n)}$ . Naturalmente anche in questo caso possiamo reindicizzare i punti in ordine crescente di indice.

Ad esempio se  $\alpha < \beta$  risultano essere:  $\mathcal{K}^{(0)} = \{0, 1\}$

$$\mathcal{K}^{(1)} = \{0, \alpha, 1\}$$

$$\mathcal{K}^{(2)} = \{0, \alpha, \alpha + \beta\alpha, 1\} \text{ e così via.}$$

Questo schema è detto "procedura di Kakutani" e fu Kakutani stesso a mostrare che:

**Teorema 1.3.11.** *Per ogni  $\alpha \in ]0, 1[$ , la successione  $(\mathcal{K}^{(n)})$  è u.d..*

La dimostrazione che riporteremo è dovuta a Adler e Flatto [1] e utilizza risultati classici di teoria ergodica. A tal proposito inseriamo di seguito alcune definizioni e risultati di base, per i quali si faccia riferimento al capitolo 29 di [16] dovuto a F.Blume.

**Notazione 1.3.12.** *Per semplicità, invece di utilizzare  $\mathcal{K}^{(n)}$ , useremo  $\mu_n$  per indicare la misura di probabilità ottenuta come la media delle misure di Dirac concentrate nei punti determinanti la partizione  $\mathcal{K}^{(n)}$ .*

**Definizione 1.3.13.** *Data una funzione misurabile  $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ , un insieme misurabile  $A$  si dice  $\varphi$ -invariante se:*

$$\lambda(\varphi^{-1}(A) \Delta A) = 0$$

dove  $\Delta$  è la differenza simmetrica.

Se  $\Phi$  è una famiglia numerabile di funzioni misurabili, un insieme  $A$  misurabile è detto  $\Phi$ -invariante se è  $\varphi$ -invariante per ogni  $\varphi \in \Phi$ .

**Definizione 1.3.14.** *Una funzione misurabile  $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  si dice che preserva la misura se:*

$$\lambda(\varphi^{-1}(A)) = \lambda(A)$$

per ogni insieme  $A$  misurabile.

Si dice che una famiglia numerabile  $\Phi$  di funzioni misurabili preserva la misura se ogni  $\varphi \in \Phi$  preserva la misura.

**Definizione 1.3.15.** *Una funzione misurabile  $\varphi$  è detta ergodica se preserva la misura e se per ogni insieme  $A$   $\varphi$ -invariante si ha:*

$$\lambda(A) = 0 \quad \text{o} \quad \lambda(A) = 1$$

Una famiglia numerabile  $\Phi$  di funzioni misurabili è detta ergodica se ogni  $\varphi \in \Phi$  è ergodica.

**Definizione 1.3.16.** Una funzione  $g$  a valori reali definita su  $[0, 1]$  è detta  $\varphi$ -invariante se vale quasi ovunque che:

$$g(\varphi(x)) = f(x)$$

ed è detta  $\Phi$ -invariante se è  $\varphi$ -invariante per ogni  $\varphi \in \Phi$ ; dove  $\varphi$  e  $\Phi$  sono quelle delle precedenti definizioni.

**Teorema 1.3.17.** Sia  $\Phi$  una famiglia numerabile di funzioni misurabili. Supponiamo che  $\Phi$  sia ergodica e che  $g$  sia una funzione misurabile, limitata e  $\Phi$ -invariante. Allora  $g$  è quasi ovunque costante.

Possiamo ora intraprendere la dimostrazione del teorema 1.3.11.

Innanzitutto utilizzando il corollario 1.1.7, il nostro obiettivo si riduce a mostrare che:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{m_n} \sum_{i=1}^{m_n} f(x_i^{(n)}) = \int_0^1 f dx \quad (1.35)$$

Allora, usando la notazione 1.3.12, possiamo dare una formulazione equivalente del teorema:

**Teorema 1.3.18.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(I) = \lambda(I)$  per ogni intervallo  $I \subset [0, 1]$ , cioè  $\mu_n \rightharpoonup \lambda$ .

Prima di addentrarci nella dimostrazione è necessario fare qualche altra considerazione preliminare che ci consentirà di collocare il risultato di Kakutani nella giusta prospettiva.

Definiamo induttivamente un'altra successione di insiemi:

$$\mathcal{D}^{(n)} = \left\{ y_i^{(n)} : i = 1, 2, \dots, 2^n \right\}.$$

I punti  $y_i^{(n)}$  di  $[0, 1]$  siano disposti in ordine crescente di indice.

Sia dunque  $\mathcal{D}^{(0)} = \{0, 1\}$ .  $\mathcal{D}^{(n+1)}$  è ottenuto da  $\mathcal{D}^{(n)}$  inserendo un nuovo punto  $y_{i-1}^{(n)} + \alpha \left( y_i^{(n)} - y_{i-1}^{(n)} \right)$  in ogni intervallo  $\left[ y_i^{(n)} - y_{i-1}^{(n)} \right]$  per  $i = 1, 2, \dots, 2^n$ .

Naturalmente anche in questo caso possiamo reindicizzare i punti in ordine crescente di indice.

Questa procedura viene chiamata "procedura diadica". Osserviamo che se  $\alpha = \frac{1}{2}$  si ha  $\mathcal{D}^{(n)} = \mathcal{K}^{(n)}$  per tutti gli  $n$ , altrimenti si ha  $\mathcal{K}^{(n)} \subsetneq \mathcal{D}^{(n)}$  per  $n \geq 2$ .

Indichiamo ora con  $\nu_n^\alpha$  la misura di probabilità ottenuta come la media delle misure di Dirac concentrate nei punti di  $\mathcal{D}^{(n)}$ , dove  $\alpha$  vuole sottolineare la dipendenza di queste misure dalla scelta iniziale di  $\alpha$ . Allora  $(\nu_n^\alpha)$  converge debolmente a  $\nu^\alpha$ , ma soltanto per  $\alpha = \frac{1}{2}$  si ha  $\nu^\alpha = \lambda$ .

La sorprendente peculiarità dell'algoritmo di Kakutani è che, invece, la misura limite di  $(\mu_n)$  non solo esiste unica ma è sempre indipendente dalla scelta iniziale di  $\alpha$ .

**Notazione 1.3.19.**

- $\gamma^{(n)} =$  la partizione determinata dai punti di  $\mathcal{K}^{(n)}$ .
- $\delta^{(n)} =$  la partizione determinata dai punti di  $\mathcal{D}^{(n)}$ .

Ogni  $I \in \delta^{(n)}$ , per  $n \geq 1$  può essere rappresentato come  $I = I(\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n)$  dove  $\xi_j$  è uno dei due simboli  $\alpha$  o  $\beta$ .

In pratica:  $I(\alpha) = [0, \alpha]$  e  $I(\beta) = [\alpha, 1]$

inoltre se  $I(\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n) = [y_{i-1}^{(n)}, y_i^{(n)}]$  allora risultano

$$I(\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n \alpha) = \left[ y_{i-1}^{(n)}, y_{i-1}^{(n)} + \alpha \left( y_i^{(n)} - y_{i-1}^{(n)} \right) \right]$$

$$\text{e } I(\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n \beta) = \left[ y_{i-1}^{(n)} + \alpha \left( y_i^{(n)} - y_{i-1}^{(n)} \right), y_i^{(n)} \right].$$

Quando inseriamo i valori specifici di  $\xi_j$  è conveniente indicare le  $r$  occorrenze consecutive di uno stesso simbolo con quel simbolo elevato alla potenza  $r$ -sima; ad esempio  $I(\alpha \alpha \beta \beta \beta) = I(\alpha^2 \beta^3)$ .

Ovviamente  $\lambda(I(\xi_1\xi_2\dots\xi_n)) = \alpha^p\beta^q$ , dove  $p$  è il numero di occorrenze di  $\alpha$  in  $I(\xi_1\xi_2\dots\xi_n)$  e  $q$  quello di  $\beta$ .

**Osservazione 1.3.20.** *Le lettere  $\alpha$  e  $\beta$  interpretano un duplice ruolo: a volte indicano numeri, altre volte sono semplicemente simboli. Tuttavia il loro significato emerge sempre con chiarezza dal contesto specifico in cui essi si trovano.*

Tornando al teorema, sappiamo che ogni successione di misure di probabilità è debolmente compatta, pertanto esiste una misura che è il limite debole di una sottosuccessione  $(\mu_{n_k})$  di  $(\mu_n)$ . Per mostrare il teorema 1.3.18 è sufficiente provare che:

**Asserzione 1.3.21.**  *$\lambda$  è l'unico limite debole di ogni sottosuccessione convergente di  $(\mu_n)$ .*

Questa affermazione implica, infatti, che la successione  $(\mu_n)$  stessa converge debolmente a  $\lambda$ . Se quest'ultima implicazione non fosse vera, esisterebbero  $\varepsilon > 0$ ,  $I \subset [0, 1]$  e una sottosuccessione  $(\mu_{n_k})$  tale che  $|\mu_{n_k}(I) - \lambda(I)| \geq \varepsilon$ . Per la compattezza esiste una sottosuccessione di  $(\mu_{n_k})$  che converge debolmente a una misura  $\mu$ , ma  $\mu(I) \neq \lambda(I)$  e ciò contraddice l'ipotesi che  $\lambda$  è l'unico limite debole di ogni sottosuccessione di  $\mu_n$ .

Sia dunque  $\mu$  il limite debole di ogni sottosuccessione di  $\mu_n$ , il nostro scopo è mostrare che  $\mu = \lambda$ .

Prima di procedere alla dimostrazione di 1.3.21, presentiamo una stima valida per tutti i  $\mathcal{K}^{(n)}$ .

**Lemma 1.3.22.** *Siano:*

$$L_n = \max\{\lambda(I) : I \in \gamma^{(n)}\} \quad e \quad l_n = \min\{\lambda(I) : I \in \gamma^{(n)}\}.$$

Allora  $l_1 L_n \leq l_n$  per  $n = 0, 1, \dots$

*Dimostrazione.*

Per ipotesi induttiva, supponiamo che la tesi valga per  $n - 1$ , cioè:

$l_1 L_{n-1} \leq l_{n-1}$ . Consideriamo  $l_n$  e  $L_n$  e osserviamo che, per come è stato costruito  $\mathcal{K}^{(n)}$  a partire da  $\mathcal{K}^{(n-1)}$ , si ha  $L_n < L_{n-1}$ . Ora  $l_1 = \min\{\alpha, \beta\}$  dunque  $l_n = \min\{l_{n-1}, \alpha L_{n-1}, \beta L_{n-1}\}$ . In sostanza si possono presentare due casi:

- $l_n = l_{n-1}$
- $l_n = l_1 L_{n-1}$

In entrambi i casi giungiamo alla tesi, infatti nel primo caso abbiamo che:

$$l_1 L_n < l_1 L_{n-1} \leq l_{n-1} = l_n$$

mentre nel secondo:

$$l_1 L_n < l_1 L_{n-1} = l_n.$$

□

Dal lemma appena dimostrato e dalla disuguaglianza  $nl_n \leq 1$  risulta che:  $L_n \rightarrow 0$ . Usando  $L_n$  e  $l_n$  possiamo stimare il numero di punti di  $\mathcal{K}^{(n)}$  che cadono in un intervallo  $I$  e sfruttando il lemma 1.3.22 otteniamo per ogni  $n \in \mathbb{N}$ :

$$l_1 \lambda(I) \leq l_1 L_n \leq l_n \leq \mu_n(I). \quad (1.36)$$

Osserviamo che  $\mu_n(I) = \frac{1}{h(n)}$ , dove  $h(n)$  è il numero di intervalli di  $\gamma^{(n)}$ . Se, dunque, l'ultima disuguaglianza non fosse valida, cioè se fosse  $l_n > \mu_n(I)$  allora  $l_n > \frac{1}{h(n)}$  che è assurdo.

Inoltre vale anche per ogni  $n \in \mathbb{N}$ :

$$\mu_n(I) \leq L_n \leq \frac{l_n}{l_1} \leq \frac{\lambda(I)}{l_1}. \quad (1.37)$$

Da 1.36 e da 1.37 segue che:

$$l_1 \lambda(I) \leq \mu_n(I) \leq \frac{\lambda(I)}{l_1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

da cui concludiamo:

$$l_1 \lambda(I) \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mu_n(I) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mu_n(I) \leq \frac{\lambda(I)}{l_1}$$

Pertanto  $\mu$  e  $\lambda$  sono misure equivalenti e la derivata di Radon-Nikodym soddisfa:

$$l_1 \lambda(I) \leq \mu(I) = \int_I \frac{d\mu}{d\lambda} d\lambda \Rightarrow l_1 \int_I d\lambda \leq \int_I \frac{d\mu}{d\lambda} d\lambda \leq \frac{1}{l_1} \int_I d\lambda$$

da cui:

$$l_1 \leq \frac{d\mu}{d\lambda} \leq \frac{1}{l_1} \quad (1.38)$$

Il tratto caratteristico che distingue la procedura di Kakutani da quella diadica è che la  $\frac{d\mu}{d\lambda}$  possiede una proprietà di invarianza per traslazioni che mostreremo nel seguente lemma.

**Lemma 1.3.23.** *Ogni intervallo diadico  $I \in \delta^{(n)}$  appare in qualche  $\gamma^{(m)}$  con  $m \geq n$ . Se  $I$  e  $I'$  sono due intervalli diadici aventi la stessa lunghezza allora:*

$$\frac{d\mu}{d\lambda}(x) = \frac{d\mu}{d\lambda}(x + \tau)$$

per quasi ogni  $x \in I$ , dove  $\tau$  è il numero determinato da:  $I' = I + \tau$ .

*Dimostrazione.*

La procedura di Kakutani genera solo intervalli diadici, ma è anche vero che ogni intervallo diadico è prodotto dall'algoritmo di Kakutani. Sia  $I$  un qualunque intervallo diadico. Essendo  $L_n \rightarrow 0$ , un punto, prima o poi, viene certamente inserito nella parte interna di  $I$ , che indichiamo con  $I^\circ$ . Sia  $m$  il più piccolo intero tale che  $\mathcal{K}^{(m)} \cap I^\circ \neq \emptyset$ , effettivamente  $\mathcal{K}^{(m)} \cap I^\circ$  consiste di un solo punto. Osserviamo ora una proprietà basilare degli intervalli diadici, che ci sarà utile anche in seguito: due intervalli diadici o sono disgiunti o sono contenuti l'uno nell'altro. Dunque necessariamente si ha che  $I \in \gamma^{(m-1)}$ .



Siano ora  $I$  e  $I'$  due intervalli diadici aventi la stessa lunghezza. La procedura di Kakutani agisce nello stesso maniera su  $I$  e su  $I'$ . Infatti il modo di dividere  $I$  in base all'algoritmo di Kakutani è identico a quello di  $I'$ , anche se gli intervalli potrebbero apparire in  $\gamma^{(n)}$  diversi o provenire da  $\delta^{(n)}$  differenti. Il comportamento di  $\mu$  sui sottoinsiemi di  $I'$ , perciò, è semplicemente una traslazione fissata del suo comportamento sui sottoinsiemi di  $I$ .

□

Questo lemma suggerisce di introdurre la seguente famiglia di trasformazioni che preservano la misura di Lebesgue.

Dati due intervalli  $I \in \delta^{(m)}$  e  $J \in \delta^{(m)}$  della stessa lunghezza e tali che:  $J = I + \tau$ , definiamo  $\varphi_{I,J}$  su  $[0, 1]$  come segue:

$$\varphi_{I,J} = \begin{cases} x + \tau & \text{se } x \in I \\ x - \tau & \text{se } x \in J \\ x & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (1.39)$$

Denotiamo con  $\Phi$  la famiglia di tutte queste trasformazioni  $\varphi_{I,J}$ . Il lemma 1.3.23 afferma che  $\frac{d\mu}{d\lambda}(x)$  è una funzione  $\Phi$ -invariante. La dimostrazione di 1.3.21 sarà completa se mostriamo che la famiglia  $\Phi$  è ergodica. Infatti da ciò segue per il teorema 1.3.17 che  $\frac{d\mu}{d\lambda}(x)$  è quasi ovunque costante e quindi la tesi. Prima di dimostrare l'ergodicità di  $\Phi$  introduciamo il concetto di prodotto infinito di spazi di probabilità (si veda [6]) e il teorema di Hewitt-Savage (teorema 11.3 di [8]).

**Notazione 1.3.24.** Con  $(Y, \mathcal{S}, \mu)$  indichiamo uno spazio di misura in cui:

- $Y$  è un insieme non vuoto
- $\mathcal{S}$  una  $\sigma$ -algebra per  $X$
- $\mu$  una misura su  $\mathcal{S}$

Riportiamo innanzitutto un risultato generale per la cui dimostrazione si rimanda a pg.157 di [8].

**Teorema 1.3.25.** *Se  $((X_i, \mathcal{S}_i, \mu_i))$  è una successione di spazi di misura finiti con  $\mu_i(X_i) = 1$ , allora esiste un'unica misura  $\mu$  sulla  $\sigma$ -algebra prodotto  $\mathcal{S} = \prod_{i=1}^{\infty} \mathcal{S}_i$  tale che per ogni insieme misurabile  $E$  del tipo  $J \times \prod_{i=n+1}^{\infty} \mathcal{S}_i$  con  $J \subseteq (\prod_{i=1}^n \mathcal{S}_i)$  risulta:*

$$\mu(E) = (\mu_1 \times \dots \times \mu_n)(J)$$

La misura  $\mu$  è detta *misura prodotto*.

Sia  $X_n = x_1, \dots, x_k$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$  una successione di insiemi con la probabilità:  $P(\{x_i\}) = p_i$  per  $1 \leq i \leq k$  e con la  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{A}_n$  costituita da tutti i sottoinsiemi di  $X_n$ . Il prodotto cartesiano

$$X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$$

è definito come:  $X = \{(x_1, \dots, x_n, \dots), x_n \in X_n, n = 1, 2, \dots\}$ .

Vogliamo costruire su  $X$  una misura prodotto, a tal scopo definiamo i sottoinsiemi di  $X$  detti *cilindri*.

**Definizione 1.3.26.** *Un cilindro  $C$  di ordine  $m$  è un insieme del tipo:*

$$C = \prod_{n=1}^m A_n \times \prod_{n=m+1}^{\infty} X_n$$

dove  $A_n \in \mathcal{A}_n$  e  $A_n \subset X_n$ .

Per i cilindri di ordine  $m$  fissiamo:

$$P(C) = \prod_{n=1}^m P(A_n) \tag{1.40}$$

Consideriamo allora su  $X$  la  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{A}$  generata dai cilindri di  $X$  che chiameremo  $\sigma$ -algebra prodotto. Per il teorema 1.3.25 esiste un'unica probabilità  $P$  nella  $\sigma$ -algebra prodotto, che assume sui cilindri il valore 1.40.

Abbiamo così costruito lo spazio di probabilità  $(X, \mathcal{A}, P)$  prodotto degli infiniti spazi di probabilità  $(X_n, \mathcal{A}_n, P_n)$ .

**Teorema 1.3.27** (Teorema di Hewitt-Savage). *Una misura prodotto su un prodotto infinito di spazi di misura può assumere soltanto i valori 0 e 1 per insiemi che sono invarianti rispetto a tutte le permutazioni finite di coordinate.*

**Lemma 1.3.28.**  $\Phi$  è ergodica.

*Dimostrazione.*

Consideriamo la successione di spazi di probabilità identici  $(X_n, \mathcal{A}_n, P_n)$ , dove  $X_n = \{\alpha, \beta\}$ ,  $\mathcal{A}_n = \{\emptyset, \{\alpha\}, \{\beta\}, X_n\}$  e  $P_n(\{\alpha\}) = \alpha$  e  $P_n(\{\beta\}) = \beta$ .

Sia  $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$  e quindi  $(X, \mathcal{A}, P)$  sia lo spazio di probabilità prodotto costruito come abbiamo fatto prima in generale. L'intervallo unitario con la misura di Lebesgue e l'algebra costituita dagli insiemi boreliani  $([0, 1], \mathcal{B}, \lambda)$  è isomorfo a  $(X, \mathcal{A}, P)$ , purchè in  $X$  si trascuri l'insieme numerabile e quindi di misura nulla

$$X_0 = \{(\xi_1 \dots \xi_k \alpha \bar{\beta}), k \in \mathbb{N}\}$$

dove  $\xi_j = \alpha$  e  $\xi_j = \beta$ . Infatti ad ogni punto  $x \in [0, 1]$  possiamo associare la successione degli intervalli diadici che lo contengono e a questa una successione di  $\alpha$  e  $\beta$ , cioè un punto di  $X$ . In simboli:

$$[0, 1] \ni x \mapsto (\xi_1 \dots \xi_n \dots) \in X$$

Questa corrispondenza manda dunque intervalli diadici in cilindri e preserva la misura, ma non è biunivoca perchè non sempre la rappresentazione di un punto in  $[0, 1]$  in termini di  $\alpha$  e  $\beta$  è unica. Ad esempio, per  $\alpha < \beta$ , se  $x \in \mathcal{D}^{(2)}$  a destra di  $\alpha$ , allora si hanno due rappresentazioni per  $x$ :

$$x \in I(\beta\alpha) \mapsto (\beta\alpha\bar{\beta})$$

ma anche  $x \in I(\beta\beta) \mapsto (\beta\beta\bar{\alpha})$ .

In generale i punti  $(\xi_1 \dots \xi_k \alpha \bar{\beta})$  e  $(\xi_1 \dots \xi_k \beta \bar{\alpha})$  corrispondono allo stesso punto in  $[0, 1]$ , dunque affinché la corrispondenza sia biunivoca occorre trascurare l'insieme  $X_0$ .

Inoltre  $X_0$  è numerabile poichè è unione numerabile di insiemi finiti:

$$X_0 = \bigcup_{k=0}^{\infty} Y_k$$

dove per  $k$  fissato  $Y_k = \{(\xi_1 \dots \xi_k \alpha \bar{\beta})\}$  contiene  $2^k$  elementi.

In definitiva l'isomorfismo che cercavamo è:

$$(X \setminus X_0) \cong [0, 1]$$

e preserva la misura.

Allora l'immagine di  $\Phi$  sullo spazio prodotto, tramite tale isomorfismo, genera una famiglia di trasformazioni  $\Phi'$  che include la famiglia  $\Psi$  delle permutazioni di un numero finito di coordinate. Ogni permutazione in  $\Psi$  è una trasformazione che preserva la misura, allora dal teorema 1.3.27 di Hewitt-Savage segue che la famiglia  $\Psi$  è ergodica.

Essendo  $\Psi \subset \Phi'$ , risulta che  $\Phi'$  è ergodica e, giacchè l'isomorfismo preserva la misura, anche  $\Phi$  è ergodica.

□

## Capitolo 2

# Elementi di geometria frattale

La geometria frattale è una recente branca della matematica, nata dall'esigenza di descrivere e interpretare alcune particolari forme presenti in natura, che sono ben lontane dalle figure regolari rappresentate dalla geometria euclidea.

I primi oggetti frattali vennero introdotti nell'ambiente scientifico tra il 1800 e il 1900 da numerosi matematici, che intrapresero lo studio di queste singolari figure. Inizialmente, però, tali entità geometriche stentaronο a trovare posto nella rigorosa teoria matematica a causa delle loro caratteristiche irregolari e per lungo tempo i frattali furono guardati dai matematici con curiosità, ma soprattutto con timore. La tendenza generale fu quella di accantonare i frattali come oggetti "patologici", che difficilmente avrebbero potuto essere materia di studio.

Soltanto alla fine degli anni settanta lo scienziato Benoit Mandelbrot, di educazione francese e che oggi lavora negli Stati Uniti, pubblicò un lavoro [13], ristutturato e ampliato nel successivo [14], nel quale si propose di raccogliere in modo organico studi e concetti espressi fino ad allora sull'argomento. Proprio in quest'opera venne usato per la prima volta il termine *frattale*, parola

derivante dal termine latino *fractus*, che significa frammentato e che ben sintetizza l'aspetto di questi insiemi.

## 2.1 Oggetti frattali

Un problema che si presentò sin dal principio fu quello di fornire una definizione matematica di frattale.

Un primo tentativo è da attribuirsi a Mandelbrot in [13], che definisce frattale un insieme con dimensione di Hausdorff (si veda il paragrafo 2.2.2) strettamente maggiore della dimensione topologica. Questa definizione risulta però insoddisfacente, poichè esclude diversi insiemi che presentano comunque le caratteristiche frattali, infatti esistono esempi di frattali che hanno dimensione di Hausdorff intera (si veda il quarto esempio di 2.3.15). In seguito sono state poste molte altre definizioni di frattale, ma nessuna ha riscosso un'accoglienza unanime.

A tal proposito riportiamo da [5] una metafora di Falconer particolarmente efficace: "La definizione di *frattale* dovrebbe essere trattata allo stesso modo di come i biologi trattano la definizione di *vita*. Infatti non esiste una definizione ma soltanto una lista di proprietà caratterizzanti un essere vivente, come la capacità di riprodursi e di muoversi. Molti esseri viventi hanno più caratteristiche di quelle della lista, molti altri costituiscono delle eccezioni. Analogamente mi sembra più giusto identificare un frattale nella lista di proprietà fondamentali che lo caratterizzano, piuttosto che cercarne una definizione precisa."

### 2.1.1 Esempi di frattali

Seguendo la linea dettata dall'osservazione di Falconer, elenchiamo dapprima alcuni esempi di frattali, mettendone in evidenza i tratti principali, dei quali ci serviremo per stilare la lista di proprietà caratterizzanti un frattale.

#### Insieme ternario di Cantor

L'insieme ternario di Cantor, introdotto nel 1872 dal matematico tedesco Georg Cantor in [3], è in assoluto uno dei frattali più noti e studiati. Viene costruito a partire dall'intervallo unitario  $[0, 1]$  tramite una successione infinita di operazioni di rimozione.

Poniamo  $E_0 = [0, 1]$ . Sia  $E_1$  l'unione dei due intervalli ottenuti rimuovendo da  $E_0$  l'intervallo  $]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$ . In pratica, in questo primo passo, abbiamo cancellato il terzo centrale da  $E_0$ , ma non i punti  $\frac{1}{3}$  e  $\frac{2}{3}$ , dunque  $E_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$ .

Adesso ripetiamo il procedimento: rimuoviamo i terzi centrali degli intervalli  $[0, \frac{1}{3}]$  e  $[\frac{2}{3}, 1]$ , generando quattro intervalli di lunghezza  $\frac{1}{9}$ . Al termine del secondo passaggio, abbiamo ricavato l'insieme

$E_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$ . Continuando in questo modo, al passo  $k$ -esimo avremo che  $E_k$  consiste di  $2^k$  intervalli ognuno di lunghezza  $3^{-k}$ , ottenuti dalla rimozione del terzo centrale di ciascuno degli intervalli in  $E_{k-1}$ . In figura 2.1 mostriamo i primi quattro passi di questa costruzione. L'insieme di Cantor  $C$  è dato dall'intersezione di tutti gli  $E_k$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$ :

$$C = \bigcap_{k=0}^{\infty} E_k$$

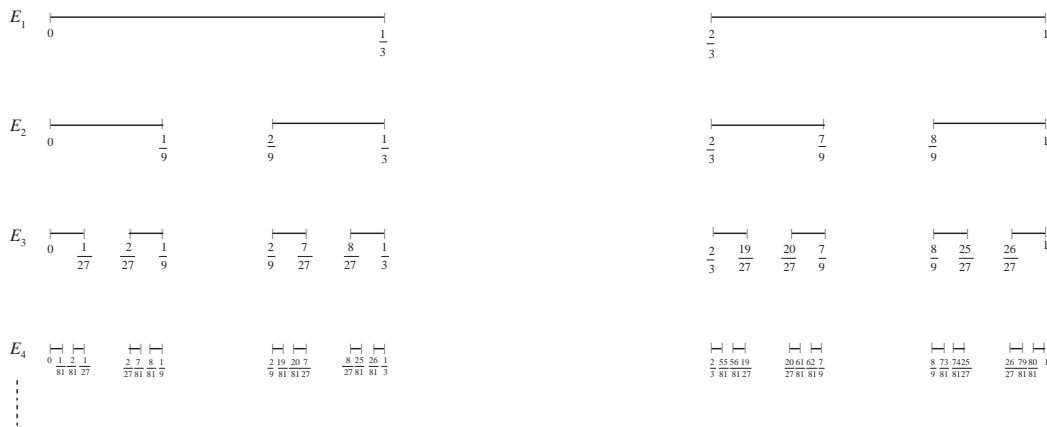


Figura 2.1: Costruzione dell'insieme di Cantor

A primo impatto potrebbe sembrare che, rimuovendo tutti questi intervalli, alla fine non resti nulla in  $C$ , ma ciò è subito contraddetto dal fatto che l'insieme di Cantor è non numerabile.

Infatti possiamo costruire una funzione  $f$  suriettiva da  $C$  in  $[0, 1]$ . Ciò implica che l'insieme d'arrivo  $[0, 1]$  non può avere cardinalità superiore a quello di partenza  $C$ . Inoltre, poiché  $C \subset [0, 1]$ , l'insieme di Cantor non può avere neanche cardinalità superiore a  $[0, 1]$ , e quindi necessariamente  $C$  e  $[0, 1]$  hanno la stessa cardinalità, cioè la potenza del continuo. Per costruire  $f$ , scriviamo i punti in  $[0, 1]$  in base tre e osserviamo che l'insieme di Cantor consiste di tutti quei punti di  $[0, 1]$  la cui rappresentazione in base tre non contiene la cifra 1. Sia  $f$  la funzione che prende ogni punto di  $C$ , sostituisce nella sua espressione ternaria ogni cifra 2 con la cifra 1 e legge il nuovo numero in base binaria; in pratica  $f$  associa ad ogni numero dell'insieme di Cantor un altro numero di  $[0, 1]$  e questa funzione è ovviamente suriettiva.

Inoltre l'insieme di Cantor è compatto, essendo sottoinsieme chiuso di



un compatto, e ha misura di Lebesgue zero. Infatti il complementare di  $C$  ha misura di Lebesgue:

$$\lambda([0, 1] \setminus C) = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{3^{k+1}} = 1$$

e dunque  $\lambda(C) = \lambda([0, 1]) - \lambda([0, 1] \setminus C) = 1 - 1 = 0$ .

Elenchiamo ora alcune proprietà che ricorrono anche in altri frattali:

- $C$  è autosimile.

Risulta evidente che la parte di  $C$  contenuta in  $[0, \frac{1}{3}]$  e quella contenuta in  $[\frac{2}{3}, 1]$  sono geometricamente simili a  $C$  stesso, secondo un rapporto di  $\frac{1}{3}$ . Analogamente ciascun intervallo di un generico  $E_k$  è una copia dell'insieme di Cantor ridotto di un fattore  $3^{-k}$ .

- $C$  ha una struttura fine.

Infatti  $C$  contiene dettagli ad ogni ingrandimento, cioè l'insieme di Cantor rivela la sua struttura in ingrandimenti di particolari arbitrariamente piccoli.

- $C$  è ottenuto ricorsivamente.

- $C$  è irregolare.

Tale insieme non può essere descritto in termini matematici classici, cioè nè come luogo dei punti che soddisfano una semplice condizione geometrica nè come insieme delle soluzioni di una equazione algebrica.

### Curva di Von Koch

La curva (o merletto) di Von Koch apparve per la prima volta nel 1904 in [11] del matematico svedese Helge Von Koch, come esempio di curva continua priva di tangente in ogni suo punto. Tuttavia fino agli anni

settanta, molti trattati di matematica sulla curva di Von Koch la identificano come una curva quasi mostruosa priva d'interesse concreto. Soltanto Mandelbrot colse l'importanza reale che essa racchiude, introducendola appositamente in [13] come modello semplificato della costa di un'isola. Tuttavia questo modello si rivela inadeguato, ciò non accade perché esso sia troppo irregolare, ma perché la sua irregolarità è troppo sistematica. Il disordine della curva di Von Koch, che tanti matematici avevano ritenuto eccessivo, risulta essere bensì insufficiente a rappresentare la realtà.

Per costruire la curva, partiamo da un intervallo  $E_0$ , ad esempio sia  $E_0 = [0, 1]$ . Dividiamo  $E_0$  in tre parti uguali e sostituiamo il terzo centrale con due lati di un triangolo equilatero che ha come base il lato rimosso. Dopo questo primo passaggio abbiamo ottenuto quattro segmenti; poniamo la loro unione pari a  $E_1$ . Applicando ad ogni segmento di  $E_1$  la stessa procedura otteniamo  $E_2$  e così via. Allora  $E_k$  si ricava rimuovendo il terzo centrale di ciascun segmento di  $E_{k-1}$  e sostituendolo con i due lati del triangolo equilatero avente come base il segmento rimosso. È importante sottolineare che, durante la costruzione finora descritta, scegliamo sempre il lato dove apporre i nuovi segmenti in modo da accrescere, ad ogni passo, l'area sottostante  $E_k$ .

Consideriamo ora la parametrizzazione naturale di  $E_0$ . Sia  $v$  la "velocità" con cui viene percorso  $E_0$ . Parametriamo  $E_1$  in modo tale che la velocità con cui percorriamo i segmenti aggiunti al primo passo è doppia rispetto a quella originale, mentre nei due tratti restanti è pari a  $v$ . Al secondo passo sui segmenti di  $E_1$  che non vengono rimossi si conserva la parametrizzazione assegnata al passo precedente. Invece ai nuovi lati apposti sui segmenti che al primo passo possedevano velocità

$v$ , si attribuisce velocità uniforme doppia e ai nuovi lati, costruiti sui segmenti che al primo passo avevano velocità  $2v$ , si assegna velocità uniforme quadrupla rispetto all'originale. Procedendo secondo questo criterio, otteniamo una successione di curve continue  $\gamma_k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  parametrizzate, ciascuna avente  $E_k$  come supporto.

Osserviamo ancora che i vertici di  $E_n$ , che sono esattamente  $1 + 4^n$ , corrispondono a dei valori  $t_k \in [0, 1]$  che sono gli stessi per tutti gli  $n \geq k$ . D'altra parte se  $t_k$  e  $t_{k+1}$  sono due di questi valori consecutivi, allora per ogni  $t \in [t_k, t_{k+1}]$  si ha che  $\|\gamma_k(t) - \gamma_n(t)\| \leq 3^{-k}$  per tutti gli  $n \geq k$ . Questo è dovuto al fatto che  $K$  è contenuto nel triangolo equilatero costruito su  $[0, 1]$  e che, per motivi di autosimilarità, questa proprietà si conserva anche al passo  $k$ -esimo della costruzione. Allora posto  $\gamma_k(t) = (x_k(t), y_k(t))$ , abbiamo che  $|x_k(t) - x_n(t)| \leq \|\gamma_k(t) - \gamma_n(t)\|$  e  $|y_k(t) - y_n(t)| \leq \|\gamma_k(t) - \gamma_n(t)\|$  per ogni  $n \geq k$ . Dunque le successioni  $(x_n(t))$  e  $(y_n(t))$  convergono uniformemente a  $x(t)$  e a  $y(t)$  rispettivamente, con  $x(t)$  e  $y(t)$  continue. Allora  $(\gamma_n(t))$  converge uniformemente a  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  continua, che è proprio la curva di Von Koch.

Osserviamo che si ritrovano in  $K$  alcune caratteristiche tipiche dell'insieme di Cantor, infatti:

- $K$  è autosimile.  
Ciascun arco di un generico  $E_k$  della curva di Von Koch è una copia di tutta la curva  $K$  ridotta di un fattore  $3^{-k}$ .
- $K$  ha una struttura fine.
- $K$  è irregolare.
- $K$  è ottenuto con un metodo semplice e ricorsivo.

Inoltre la curva di von Koch ha lunghezza infinita e, come abbiamo già

detto, è uno dei più celebri esempi di curva non derivabile in nessun punto. Infatti una curva derivabile in un punto  $\bar{x}$ , vista su scale sempre più piccole, in un intorno di  $\bar{x}$  tende ad essere vicina ad una retta passante per quel punto, invece  $K$  vista su qualsiasi scala è sempre identica a sé stessa.

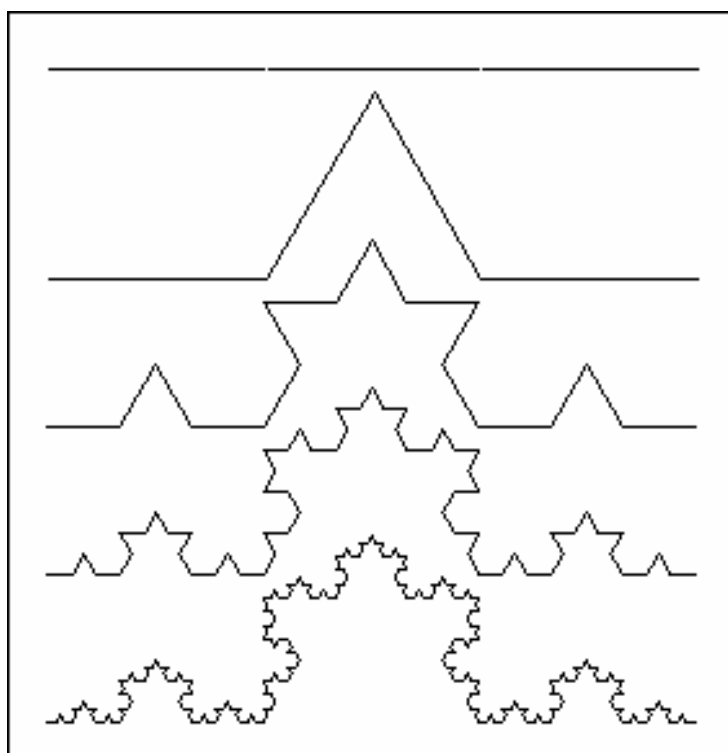


Figura 2.2: Costruzione della curva di Von Koch

### Triangolo di Sierpiński

La costruzione del triangolo di Sierpiński, introdotto dal matematico di cui porta il nome nel 1915 in [19], si basa anch'essa su una successione infinita di operazioni di rimozione.

Consideriamo un triangolo qualunque  $E_0$  nel piano, prendiamo i tre punti medi dei suoi lati che insieme ai tre vertici del triangolo di partenza definiscono quattro triangoli congruenti di cui togliamo quello centrale. Al termine di questo primo passo della costruzione abbiamo ottenuto tre triangoli congruenti i cui lati sono la metà dei lati del triangolo  $E_0$  e si toccano in tre punti; poniamo  $E_1$  pari alla loro unione. Ripetiamo lo stesso procedimento su ciascun triangolo di  $E_1$ , ottenendo nove triangoli identici e sia  $E_2$  la loro unione.

Il triangolo di Sierpiński  $S$  è dunque definito da:

$$S = \bigcap_{k=0}^{\infty} E_k$$

Anche il triangolo di Sierpiński possiede le caratteristiche che abbiamo individuato in  $C$  e  $K$ .

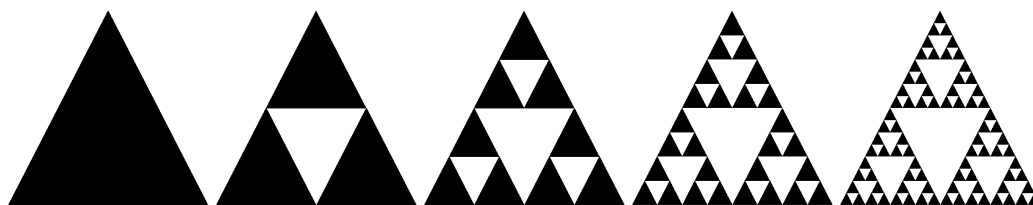


Figura 2.3: Costruzione del triangolo di Sierpiński

Naturalmente esistono molti altri esempi di oggetti frattali, anche molto noti, come gli insiemi di Julia e di Mandelbrot, il fiocco di neve di Koch, il tappeto di Sierpiński, la spugna di Sierpiński, etc.

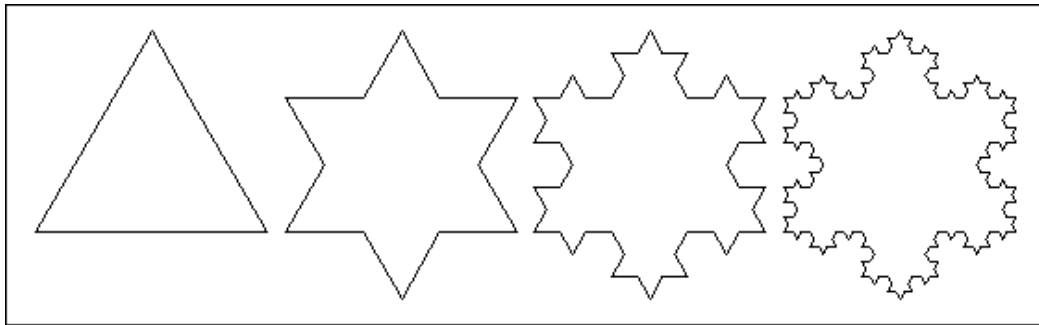


Figura 2.4: Costruzione del fiocco di neve di Koch

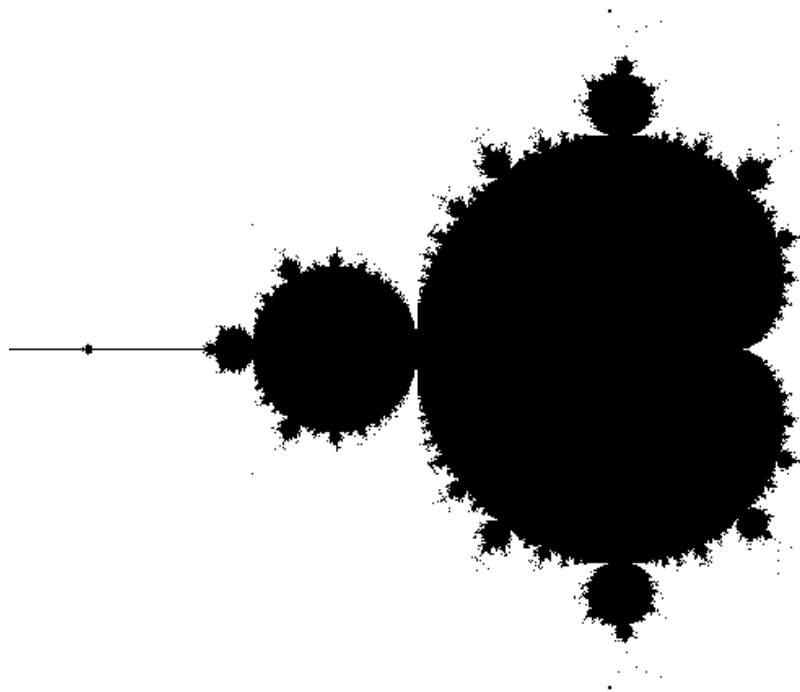


Figura 2.5: Insieme di Mandelbrot

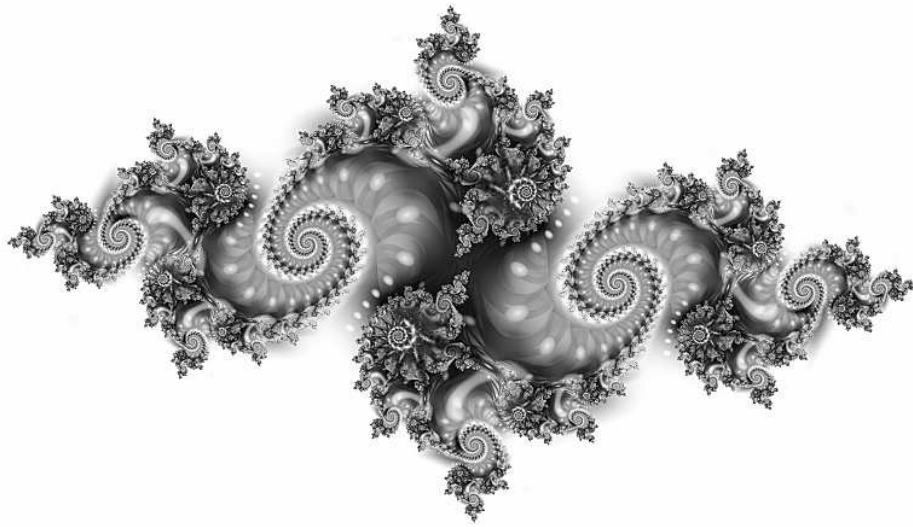


Figura 2.6: Insieme di Julia

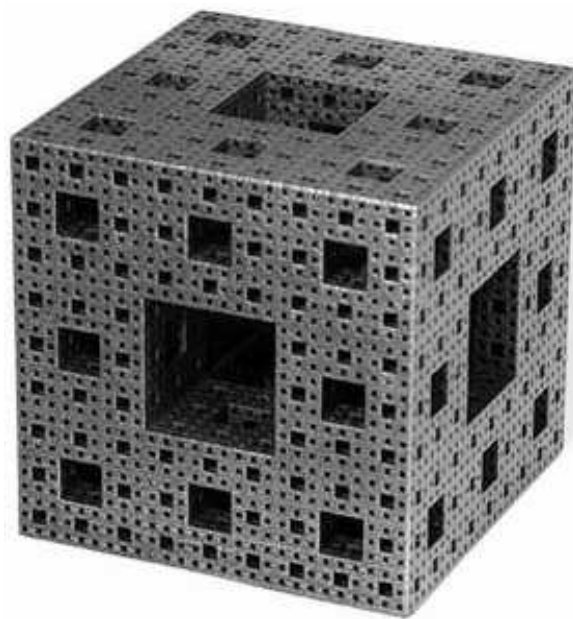


Figura 2.7: Spugna di Sierpiński

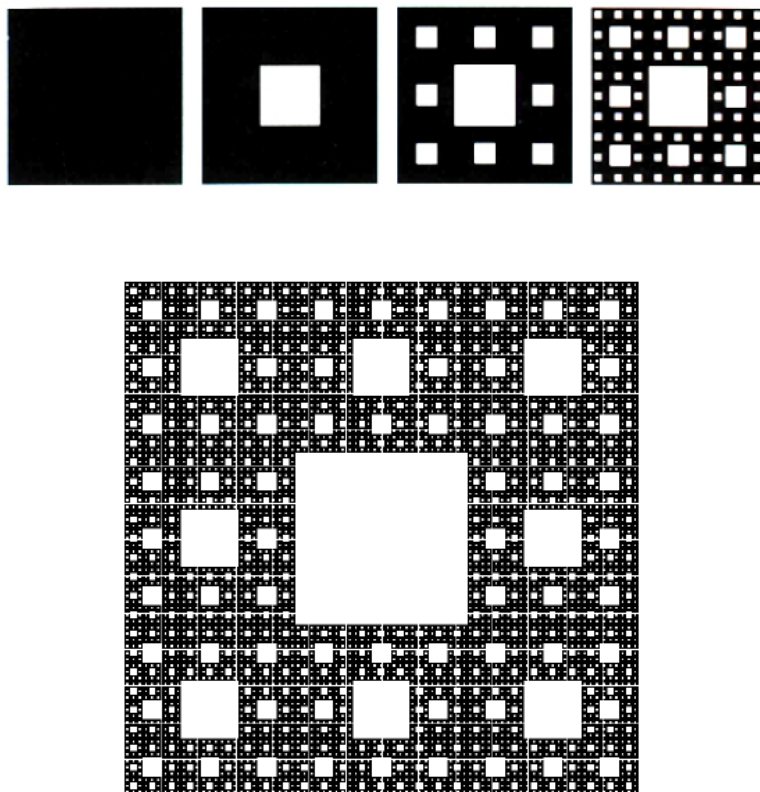


Figura 2.8: Costruzione del tappeto di Sierpiński

### 2.1.2 Proprietà degli insiemi frattali

Siamo in grado di costruire ora l'elenco delle proprietà basilari di un frattale generico  $F$ . Occorre precisare ancora una volta che questa lista non ha la pretesa di essere una definizione di frattale, ma è soltanto una sfilza di proprietà comuni alla maggior parte di questi oggetti.

1. **Autosimilarità.**  $F$  è unione di copie di sé stesso a scale differenti; in altri termini osservando una porzione molto piccola di  $F$  vi ritroviamo



replicato il frattale stesso. Tale le proprietà, talvolta, va intesa in senso statistico o approssimato.

2. **Struttura fine.**  $F$  rivela dettagli ad ogni ingrandimento, cioè ingrandendo un qualsiasi tratto di frattale si visualizzerà ancora un insieme ricco di particolari e complesso come il precedente.
3. **Irregolarità.**  $F$  ha una struttura molto raffinata, ma anche troppo irregolare per poter essere descritta, sia a livello globale che locale, con il linguaggio matematico tradizionale. In pratica  $F$  non si può descrivere come luogo di punti che soddisfano semplici condizioni geometriche o analitiche.
4. **Dimensione.** Solitamente la dimensione frattale o dimensione di Hausdorff, che introdurremo nella 2.2.2, è più grande della dimensione della geometria euclidea.

## 2.2 Misura e dimensione di Hausdorff

### 2.2.1 Definizione e proprietà della misura di Hausdorff

Introduciamo il concetto di misura di Hausdorff seguendo l'approccio di Rogers in [17], cioè costruendola a partire da una "valutazione".

**Definizione 2.2.1.** *Una funzione  $\tau$  definita su una classe  $\mathcal{S}$  di sottoinsiemi di uno spazio  $\Omega$  è detta valutazione se soddisfa:*

1.  $\phi \in \mathcal{S}$
2.  $0 \leq \tau(C) \leq \infty, \quad \forall C \in \mathcal{S}$
3.  $\tau(\phi) = 0$

**Definizione 2.2.2.** Una funzione  $\mu$  definita su una classe  $\mathcal{S}$  di sottoinsiemi di uno spazio  $\Omega$  è detta pre-misura se soddisfa:

1.  $\mu(C)$  è un numero reale non negativo o  $+\infty$  per ogni  $C \in \mathcal{S}$
2.  $\mu(\phi) = 0$
3. se  $C_1 \subset C_2$  allora  $\mu(C_1) \leq \mu(C_2)$  per ogni  $C_1, C_2 \in \mathcal{S}$
4. se  $(C_i)$  è una successione di insiemi di  $\mathcal{S}$  allora:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(C_i)$$

In particolare la proprietà 4 è detta numerabile sub-additività.

**Definizione 2.2.3.** Una funzione  $\mu$  definita su una  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{A}$  di sottoinsiemi di  $\Omega$  è detta misura se soddisfa:

1.  $\mu(A)$  è un numero reale non negativo o  $+\infty$  per ogni  $A \in \mathcal{A}$
2.  $\mu(\phi) = 0$
3. se  $A_1 \subset A_2$  allora  $\mu(A_1) \leq \mu(A_2)$  per ogni  $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$
4. se  $(A_i)$  è una successione di insiemi di  $\mathcal{A}$  allora:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

In particolare la proprietà 4 è detta numerabile additività.

Illustriamo ora due metodi, dovuti a Munroe [15], per costruire una pre-misura a partire da una valutazione.

**Teorema 2.2.4** (Metodo I). *Se  $\tau$  è una valutazione, definita su una classe di insiemi  $\mathcal{S}$  contenente il vuoto, allora la funzione:*

$$\mu(E) = \inf_{\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i \supseteq E} \sum_{i=1}^{\infty} \tau(S_i) \quad \text{con } S_i \in \mathcal{S}, \quad \forall i \in \mathbb{N} \quad (2.1)$$

*è una pre-misura su  $\Omega$ .*

**Osservazione 2.2.5.** *Adottiamo la convenzione che l'estremo inferiore su insieme vuoto di numeri reali assume il valore  $+\infty$ .*

**Definizione 2.2.6.** *Sia  $E \subset \Omega$ . Una famiglia numerabile  $(S_i)$  di sottoinsiemi non vuoti di  $\Omega$  tale che*

$$E \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$$

*è detta ricoprimento di  $E$ .*

*Dimostrazione.* (Teorema 2.2.4)

Verifichiamo che sono soddisfatte per la  $\mu$  le proprietà di pre-misura:

- $0 \leq \mu(E) \leq +\infty$  per ogni  $E \subset \Omega$ , perchè essendo per ipotesi  $\tau$  una valutazione vale la proprietà 2 di 2.2.1.

•

$$\mu(\emptyset) = \inf_{\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i \supseteq \emptyset} \sum_{i=1}^{\infty} \tau(S_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \tau(\emptyset) = 0$$

dunque  $\mu(\emptyset) = 0$ .

- Se  $E_1 \subseteq E_2$ , allora ogni ricoprimento di  $E_2$  è anche ricoprimento di  $E_1$  e perciò:  $\mu(E_1) \leq \mu(E_2)$ .
- Sia  $(E_i)$  una successione di sottoinsiemi di  $\Omega$ . Dobbiamo verificare che:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) \quad (2.2)$$

Questo risultato è banale nel caso in cui:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) = +\infty$$

Supponiamo perciò che

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) < +\infty$$

allora in particolare ogni  $\mu(E_i)$  è finito. Preso  $\varepsilon > 0$ , per ogni  $i > 1$  possiamo scegliere una successione  $(S_j^{(i)})$  di insiemi di  $\mathcal{S}$ , con  $E_i \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} S_j^{(i)}$ , tale che:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \tau(S_j^{(i)}) \leq \mu(E_i) + \varepsilon 2^{-i}$$

Sia  $(T_i)$  la successione ottenuta riordinando gli  $S_j^{(i)}$  per  $i, j = 1, 2, \dots$  in un'unica successione. Allora:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} T_i, \quad T_i \in \mathcal{S} \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

e dunque:

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \tau(T_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \tau(S_j^{(i)}) \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} (\mu(E_i) + \varepsilon 2^{-i}) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)\right) + \varepsilon \end{aligned}$$

Dall'arbitrarietà di  $\varepsilon$  segue la 2.2. □

Presentiamo ora il Metodo II, dovuto sempre a Munroe, che ha il vantaggio rispetto al primo metodo di costruire una pre-misura su uno spazio metrico, rispetto alla quale gli insiemi di Borel sono misurabili. Prima di introdurre il secondo metodo definiamo il concetto di diametro di un insieme e mostriamo un risultato preliminare.

**Definizione 2.2.7.** Il diametro di un insieme  $E$  in uno spazio metrico  $(\Omega, d)$ , che indichiamo con  $|E|$ , è pari a:

$$|E| = \sup_{x,y \in E} d(x, y)$$

con la convenzione che  $|\emptyset| = 0$ .

**Teorema 2.2.8.** Sia  $I$  un insieme arbitrario di indici. Supponiamo che, per ogni  $i \in I$ ,  $\mu_i$  è una pre-misura sull'insieme  $\Omega$ . Allora la funzione definita per ogni  $E \subset \Omega$ :

$$\mu(E) = \sup_{i \in I} \mu_i(E)$$

è una pre-misura su  $\Omega$ .

*Dimostrazione.*

- Chiaramente, essendo tutte le  $\mu_i$  pre-misure, si ha che:  $0 \leq \mu(E) \leq +\infty$  per ogni  $E$  in  $\Omega$  e che  $\mu(\emptyset) = 0$ .
- Se  $E_1 \subset E_2$  allora:

$$\mu(E_1) = \sup_{i \in I} \mu_i(E_1) \leq \sup_{i \in I} \mu_i(E_2) = \mu(E_2)$$

- Sia  $(E_j)$  una successione di insiemi in  $\Omega$ . Per ogni  $i \in I$  risulta:

$$\mu_i \left( \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu_i(E_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j)$$

allora

$$\mu \left( \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j)$$

□

**Teorema 2.2.9** (Metodo II). *Se  $\tau$  è una valutazione, definita su una classe di insiemi  $\mathcal{S}$  in uno spazio metrico  $(\Omega, d)$ , allora la funzione:*

$$\mu(E) = \sup_{\delta > 0} \mu_\delta(E) \quad (2.3)$$

dove

$$\mu_\delta(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \tau(S_i) : S_i \in \mathcal{S}, \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i \supset E \text{ e } |S_i| \leq \delta \forall i \in \mathbb{N} \right\} \quad (2.4)$$

è una pre-misura su  $\Omega$ .

**Osservazione 2.2.10.** *Diminuendo  $\delta$ , si riduce la classe dei ricoprimenti sui quali è preso l'estremo inferiore della 2.4 e dunque  $\mu_\delta(E)$  cresce al decrescere di  $\delta$  e quindi:*

$$\mu(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \mu_\delta(E)$$

*Dimostrazione.* (Teorema 2.2.9)

Per ogni  $\delta > 0$  sia  $\mathcal{S}_\delta$  il sistema di tutti gli insiemi  $C$  di  $\mathcal{S}$  con  $|C| \leq \delta$ . Segue immediatamente che la restrizione  $\tau_\delta$  di  $\tau$  a  $\mathcal{S}_\delta$  è una valutazione su  $\Omega$ . Allora per ogni  $\delta > 0$  si ha:

$$\mu_\delta(E) = \inf_{\substack{S_i \in \mathcal{S}, |S_i| \leq \delta \\ \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i \supset E}} \sum_{i=1}^{\infty} \tau(S_i) = \inf_{\substack{S_i \in \mathcal{S} \\ \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i \supset E}} \sum_{i=1}^{\infty} \tau_\delta(S_i)$$

Ora  $\mu_\delta$  è la funzione costruita tramite il Metodo I dalla valutazione  $\tau_\delta$ , allora dal teorema 2.2.4  $\mu_\delta$  è una pre-misura. Dal teorema 2.2.8 segue la tesi. □

Utilizzando il Metodo II definiamo adesso la misura di Hausdorff.

**Definizione 2.2.11.** *Sia  $E$  un insieme non vuoto in uno spazio metrico  $\Omega$ . Fissato un numero  $\delta > 0$ , chiameremo  $\delta$ -ricoprimento una famiglia numerabile  $(U_i)$  di sottoinsiemi di  $\Omega$  che costituisce un ricoprimento di  $E$  ed è tale che per ogni  $i$  si ha  $0 < |U_i| \leq \delta$ .*

**Definizione 2.2.12** (Misura di Hausdorff). *Siano  $\Omega$  uno spazio metrico,  $\mathcal{U}$  una classe di insiemi in  $\Omega$  contenente il vuoto e  $E \in \mathcal{U}$ . Fissato un numero  $s > 0$ , definiamo per ogni  $\delta > 0$ :*

$$\mathcal{H}_\delta^s(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \text{con } (U_i) \text{ } \delta\text{-ricoprimento di } E \right\} \quad (2.5)$$

e ovviamente è  $\mathcal{H}_\delta^s(\emptyset) = 0$ . Allora la pre-misura costruita con il Metodo II dalla valutazione  $\mathcal{H}_\delta^s$  è detta misura di Hausdorff  $s$ -dimensionale ed è data da:

$$\mathcal{H}^s(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(E) \quad (2.6)$$

In effetti  $\mathcal{H}^s$  non è una misura nel senso usuale del termine. Essa è intanto definita sulla famiglia di tutte le parti di  $\Omega$ . Inoltre, in generale, viene a mancare l'essenziale proprietà, richiesta a tutte le misure, della numerabile additività. Infatti se  $(E_n)$  è una successione di insiemi a due a due disgiunti, allora vale:

$$\mathcal{H}^s \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(E_n)$$

e l'identità, che in generale fallisce, è assicurata solamente se gli  $E_n$  sono tutti dei boreliani.

Comunque quest'ultimo fatto richiede una certa fatica (cf. [5]) e non ce ne occuperemo in questa tesi. L'uso, un pò improprio, della parola "misura" è infatti molto diffuso in questo capitolo della matematica.

Consideriamo ora le misure di Hausdorff su  $\mathbb{R}^n$  (si veda [5]). Osserviamo che esse costituiscono una generalizzazione dei concetti di lunghezza, area, volume per  $n = 1, 2, 3$  rispettivamente. Infatti misura  $n$ -dimensionale di Hausdorff  $\mathcal{H}^n$  è un multiplo della misura  $n$ -dimensionale di Lebesgue  $\lambda^n$ , cioè se  $F$  è un insieme boreliano di  $\mathbb{R}^n$ , allora:

$$\mathcal{H}^n(F) = c_n \lambda^n(F)$$

dove  $c_n = \frac{\pi^{\frac{1}{2}n}}{2^n (\frac{1}{2}n)!}$  è il volume di una sfera n-dimensionale di diametro 1. Ad esempio  $\mathcal{H}^0(F)$  è il numero di punti in  $F$ ; se  $F$  è una curva regolare di  $\mathbb{R}^2$ , allora  $\mathcal{H}^1(F)$  è la sua lunghezza; se  $F$  è una superficie bidimensionale regolare di  $\mathbb{R}^3$ , allora  $\mathcal{H}^2(F) = \frac{1}{2}\pi \times \text{area}(F)$  e così via.

Mostriamo ora alcune proprietà che ci saranno molto utili nella teoria dei frattali.

**Proprietà 2.2.13** (s-omogeneità). *Siano  $F \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\lambda > 0$  e  $s > 0$  allora:*

$$\mathcal{H}^s(\lambda F) = \lambda^s \mathcal{H}^s(F) \quad (2.7)$$

dove  $\lambda F = \{\lambda x : x \in F\}$ , cioè  $\lambda F$  è l'insieme ottenuto riscaldando  $F$  di un fattore  $\lambda$ .

*Dimostrazione.*

Se  $(U_i)$  è un  $\delta$ -ricoprimento di  $F$  allora  $(\lambda U_i)$  è un  $\lambda\delta$ -ricoprimento di  $\lambda F$ .

Quindi:

$$\mathcal{H}_{\lambda\delta}^s(\lambda F) \leq \sum_i |\lambda U_i|^s = \lambda^s \sum_i |U_i|^s$$

Giacchè questo vale per ogni  $\delta$ -ricoprimento di  $F$  si ha che:

$$\mathcal{H}_{\lambda\delta}^s(\lambda F) \leq \lambda^s \mathcal{H}_\delta^s(F)$$

Passando al limite per  $\delta \rightarrow 0$  si ha che:  $\mathcal{H}^s(\lambda F) \leq \lambda^s \mathcal{H}^s(F)$ . Sostituendo  $\lambda$  con  $\frac{1}{\lambda}$  e  $F$  con  $\lambda F$  otteniamo anche la disuguaglianza opposta e quindi la tesi.

□

**Proprietà 2.2.14.** *Siano  $F \subset \mathbb{R}^n$  e  $f : F \rightarrow \mathbb{R}^m$  hölderiana di esponente  $\alpha$  e costante  $c$ , cioè  $f$  è tale che:*

$$\|f(x) - f(y)\|_m \leq c \|x - y\|_n^\alpha \quad \forall x, y \in F \quad (2.8)$$



per  $\alpha > 0$  e  $c > 0$ . Allora per ogni  $s > 0$  si ha:

$$\mathcal{H}^{s/\alpha}(f(F)) \leq c^{s/\alpha} \mathcal{H}^s(F) \quad (2.9)$$

*Dimostrazione.*

Se  $(U_i)$  è un  $\delta$ -ricoprimento di  $F$ , allora poichè  $|f(F \cap U_i)|^{s/\alpha} \leq c|U_i|^\alpha$ , si ha che  $(f(F \cap U_i))$  è un  $\varepsilon$ -ricoprimento di  $f(F)$ , dove  $\varepsilon = c\delta^\alpha$ . Dunque  $\sum_i |f(F \cap U_i)|^{s/\alpha} \leq c^{s/\alpha} \sum_i |U_i|^s$ , da cui  $\mathcal{H}_\varepsilon^{s/\alpha}(f(F)) \leq c^{s/\alpha} \mathcal{H}_\delta^s(F)$ . Passando al limite per  $\delta \rightarrow 0$  e dunque per  $\varepsilon \rightarrow 0$  si ha la 2.8. □

### Osservazione 2.2.15.

- Una funzione  $f$  hölderiana di esponente 1 è detta funzione lipschitziana e dunque si ha che:

$$\mathcal{H}^s(f(F)) \leq c^s \mathcal{H}^s(F)$$

- Se  $f$  è una isometria, cioè se  $\|f(x) - f(y)\|_m = \|x - y\|_n \quad \forall x, y \in F$ , allora la misura  $s$ -dimensionale di Hausdorff si conserva:

$$\mathcal{H}^s(f(F)) = \mathcal{H}^s(F)$$

## 2.2.2 Dimensione di Hausdorff

Ritorniamo alla definizione 2.2.12. Dall'equazione 2.5 è chiaro che, per un insieme dato  $F$  e  $\delta < 1$ ,  $\mathcal{H}_\delta^s(F)$  è non decrescente rispetto a  $s$ ; allora per la 2.6 anche  $\mathcal{H}^s(F)$  è non decrescente. Se  $t > s$  e  $(U_i)$  è un  $\delta$ -ricoprimento di  $F$  abbiamo:

$$\sum_i |U_i|^t \leq \delta^{t-s} \sum_i |U_i|^s$$

allora prendendo l'estremo inferiore risulta:

$$\mathcal{H}_\delta^t(F) \leq \delta^{t-s} \mathcal{H}^s(F)$$

Passando al limite per  $\delta \rightarrow 0$ , abbiamo che se  $\mathcal{H}^s(F) < \infty$  allora risulta  $\mathcal{H}^t(F) = 0$  per  $t > s$ . Se disegniamo il grafico di  $\mathcal{H}^s(F)$  rispetto a  $s$  (figura 2.9), immediatamente ci rendiamo conto che c'è un valore critico di  $s$ , nel quale  $\mathcal{H}^s(F)$  compie un salto da  $\infty$  a 0. Questo valore critico è detto *dimensione di Hausdorff* (o di Hausdorff-Besicovitch) di  $F$ , che indicheremo con  $\dim_H F$ .

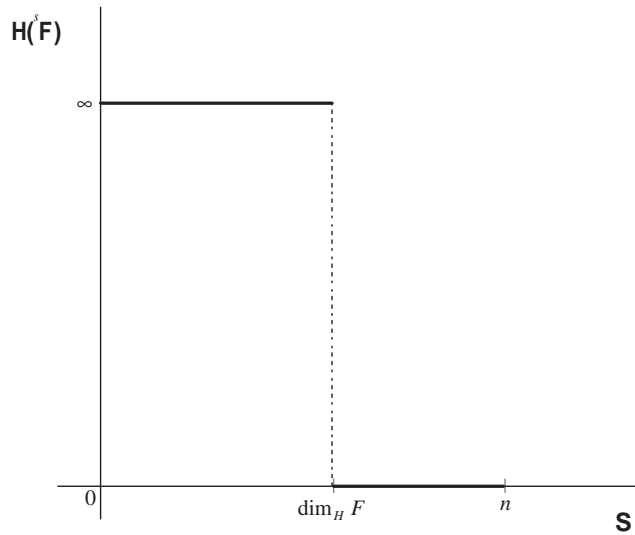


Figura 2.9: Grafico di  $\mathcal{H}^s(F)$  rispetto a  $s$

Formalmente:

$$\dim_H(F) = \inf\{s: \mathcal{H}^s(F) = 0\} = \sup\{s: \mathcal{H}^s(F) = \infty\}$$

e quindi:

$$\mathcal{H}^s(F) = \begin{cases} \infty & \text{se } s < \dim_H F \\ 0 & \text{se } s > \dim_H F \end{cases} \quad (2.10)$$

Se  $s = \dim_H F$ , allora  $\mathcal{H}^s(F)$  può essere zero o infinito o può soddisfare:

$0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$ . In particolare un insieme  $\mathcal{H}^s$ -misurabile che soddisfa quest'ultima condizione è detto *s-insieme*.

**Esempio 2.2.16.** Sia  $F$  un disco di raggio 1 sul piano in  $\mathbb{R}^3$ , allora dai concetti intuitivi di lunghezza, area e volume risulta:

$$\mathcal{H}^1(F) = \infty$$

$$\mathcal{H}^2(F) = \frac{1}{4} \times \text{area}(F) < \infty$$

$$\mathcal{H}^3(F) = 0$$

e quindi  $\dim_H(F) = 2$ .

La dimensione di Hausdorff soddisfa le seguenti proprietà:

**Insiemi aperti** Se  $F \subset \mathbb{R}^n$  è aperto, allora  $\dim_H F = n$ , poiché  $F$  contiene una palla di misura di Lebesgue  $n$ -dimensionale positiva.

**Insiemi regolari** Se  $F$  è un insieme regolare  $m$ -dimensionale, cioè è continuo e differenziabile in  $\mathbb{R}^m$  allora  $\dim_H F = m$ .

**Monotonia** Se  $E \subset F$  allora  $\dim_H E \leq \dim_H F$ , ciò segue direttamente dalla monotonia della misura di Hausdorff.

**Stabilità**  $\dim_H(E \cup F) = \max(\dim_H E, \dim_H F)$ .

**Stabilità numerabile** Se  $F_1, F_2, \dots$  è una successione di insiemi allora

$$\dim_H \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \right) = \sup_{1 \leq i < \infty} \{\dim_H F_i\}$$

Infatti per la proprietà di monotonia della dimensione di Hausdorff si ha  $\dim_H \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \right) \geq \dim_H F_j$  per ogni  $j$ . D'altra parte se  $s > \dim_H F_i$  per tutti gli  $i$ , allora  $\mathcal{H}^s(F_i) = 0$  e quindi  $\mathcal{H}^s \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \right) = 0$ .

**Insiemi numerabili** Se  $F$  è numerabile allora  $\dim_H F = 0$ .

Dalla proprietà 2.2.14 seguono:

**Proprietà 2.2.17.** *Sia  $F \subset \mathbb{R}^n$  e supponiamo che  $f : F \rightarrow \mathbb{R}^m$  soddisfi la condizione 2.8, allora:*

$$\dim_H f(F) \leq \left(\frac{1}{\alpha}\right) \dim_H F$$

*Dimostrazione.*

Se  $s > \dim_H F$  allora per la proprietà 2.2.14 si ha che:

$$\mathcal{H}^{s/\alpha}(f(F)) \leq c^{s/\alpha} \mathcal{H}^s(F) = 0$$

Ciò implica che  $\dim_H F \leq \frac{s}{\alpha}$  per tutti gli  $s > \dim_H F$  e quindi la tesi. □

**Osservazione 2.2.18.** *Se  $f : F \rightarrow \mathbb{R}^m$  è una funzione lipschitziana allora dalla proprietà precedente segue che  $\dim_H f(F) \leq \dim_H F$ .*

**Corollario 2.2.19.** *Sia  $F \subset \mathbb{R}^n$  e supponiamo che  $f : F \rightarrow \mathbb{R}^m$  sia una funzione bi-lipschitziana, cioè  $f$  soddisfa per ogni  $x, y \in F$  la condizione:*

$$c_1 \leq \|x - y\|_n \leq \|f(x) - f(y)\| \leq c_2 \|x - y\|_m$$

*dove  $0 < c_1 \leq c_2 < \infty$ , allora  $\dim_H f(F) = \dim_H F$ .*

*Dimostrazione.*

Per l'osservazione 2.2.18 si ha che  $\dim_H f(F) \leq \dim_H F$ , mentre si ottiene la disuguaglianza opposta considerando  $f^{-1} : f(F) \rightarrow F$  al posto di  $f$ . □

**Osservazione 2.2.20.** *Il corollario appena mostrato, ci presenta una proprietà fondamentale della dimensione di Hausdorff e cioè che essa è invariante rispetto alle trasformazioni bi-lipschitziane. Se, dunque, in topologia, due insiemi vengono considerati in un certo senso identici quando esiste tra loro un omeomorfismo, nella geometria frattale due insiemi vengono ritenuti uguali quando esiste un'applicazione bi-lipschitziana tra loro.*

Il calcolo della dimensione di Hausdorff costituisce un problema che non sempre è semplice risolvere, ciò è dovuto principalmente alle difficoltà che si incontrano nel fornire una stima della misura di Hausdorff di un insieme. In particolare, dato un certo insieme, risulta sempre più complicato dare una stima inferiore della sua misura di Hausdorff.

Proponiamo un esempio base di calcolo della dimensione di Hausdorff, che introduce a una delle tecniche principali di determinazione della dimensione di Hausdorff di un frattale.

**Teorema 2.2.21** (Dimensione di Hausdorff dell'insieme di Cantor).

Sia  $C$  l'insieme ternario di Cantor. Risulta  $\dim_H C = \frac{\log 2}{\log 3}$ .

Inoltre  $\frac{1}{2} \leq \mathcal{H}^s(C) \leq 1$  con  $s = \frac{\log 2}{\log 3}$ .

*Dimostrazione.*

Chiamiamo *intervalli basilari* gli intervalli di lunghezza  $3^{-k}$  che costituiscono gli insiemi  $E_k$  nella costruzione di  $C$  (si veda 2.1.1). Consideriamo il ricoprimento  $(U_i)$  di  $C$  consistente dei  $2^k$  intervalli di  $E_k$  di lunghezza  $3^{-k}$ , allora risulta:

$$\mathcal{H}_{3^{-k}}^s(C) \leq \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s = 2^k \cdot 3^{-ks}$$

La maggiorazione è finita se  $s = \frac{\log 2}{\log 3}$ , infatti per questo valore di  $s$  si ha:

$$\mathcal{H}_{3^{-k}}^s(C) \leq 1$$

Passando al limite per  $k \rightarrow \infty$  si ha che:  $\mathcal{H}^s(C) \leq 1$ .

Per mostrare che  $\mathcal{H}^s(C) \geq \frac{1}{2}$ , e quindi che la  $\dim_H C$  è proprio  $s$ , proviamo:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s \geq \frac{1}{2} = 3^{-s} \quad (2.11)$$

per ogni ricoprimento  $(U_i)$  di  $C$ .

Chiaramente è sufficiente assumere che gli  $U_i$  siano intervalli. Espandendoli

leggermente e mantenendoli aperti, per la compattezza di  $C$ , basta verificare la 2.11 soltanto per una collezione finita  $(U_i)$  di sottointervalli chiusi di  $[0, 1]$ . Per ogni  $U_i$  sia  $k$  l'intero tale che:  $3^{-k-1} \leq |U_i| \leq 3^{-k}$ . Allora  $U_i$  può intersecare al più uno degli intervalli basilari di  $E_k$ , poichè la separazione tra due intervalli basilari di  $E_k$  è almeno di  $3^{-k}$ . Se  $j \geq k$ , allora per costruzione,  $U_i$  interseca al più  $2^{j-k} = 2^j \cdot 3^{-sk} \leq 2^j \cdot 3^s \cdot |U_i|^s$  intervalli basilari di  $E_j$ . Se scegliamo  $j$  abbastanza grande da soddisfare  $3^{-(j+1)} \leq |U_i|$  per tutti gli  $U_i$ , allora poichè gli  $U_i$  intersecano tutti i  $2^j$  intervalli basilari di lunghezza  $3^{-j}$  otteniamo che:  $2^j = \sum_i 2^j \cdot 3^s |U_i|^s$  da cui  $\sum_i |U_i|^s \geq \frac{2^j}{2^j \cdot 3^s} = 3^{-s} = \frac{1}{2}$ .

□

Con uno sforzo ulteriore (si faccia riferimento a [4]) possiamo adattare il procedimento usato per dimostrare la stima inferiore di  $\mathcal{H}^s(C)$  per verificare che:

**Teorema 2.2.22.**  $\mathcal{H}^s(C) = 1$  per  $s = \dim_H(C) = \frac{\log 2}{\log 3}$ .

*Dimostrazione.*

Abbiamo già mostrato che  $\mathcal{H}^s(C) \leq 1$ , per ottenere la disuguaglianza opposta mostreremo che:

$$\sum_{I \in \mathcal{I}} |I|^s \geq 1 \tag{2.12}$$

per ogni collezione  $\mathcal{I}$  di intervalli che ricoprono  $C$ .

Analogamente a prima basterà mostrare la 2.12 per ogni ricoprimento finito di  $C$ . Possiamo prendere, inoltre, ciascun  $I$  pari al più piccolo intervallo contenente una coppia di intervalli basilari  $J$  e  $J'$  non necessariamente appartenenti allo stesso  $E_j$ . Se  $J$  e  $J'$  sono gli intervalli basilari più grandi contenuti in  $I$ , allora  $I$  risulta costituito da  $J$ , seguito da un intervallo  $K$  nel complementare di  $C$ , seguito a sua volta da  $J'$ . Dalla costruzione di  $C$  si

evince che  $|J|, |J'| \leq |K|$  perciò:

$$\begin{aligned} |I|^s &= (|J| + |K| + |J'|)^s = \left( |J| + \frac{1}{2}|K| + \frac{1}{2}|K| + |J'| \right)^s \\ &\geq \left( |J| + \frac{1}{2}|J| + \frac{1}{2}|J'| + |J'| \right)^s = \left( \frac{3}{2}(|J| + |J'|) \right)^s \\ &= 3^s \left( \frac{1}{2}|J|^s + \frac{1}{2}|J'|^s \right) \geq 2 \left( \frac{1}{2}|J|^s + \frac{1}{2}|J'|^s \right) = |J|^s + |J'|^s \end{aligned}$$

Perciò sostituendo ad  $I$  i due sottointervalli  $J$  e  $J'$  non aumentiamo la somma che stiamo cercando di calcolare, cioè  $\sum_{I \in \mathcal{I}} |I|^s \geq \sum (|J|^s + |J'|^s)$ . Procedendo in questo modo, dopo un numero finito di passi, otteniamo un ricoprimento  $\mathcal{R}$  di  $C$  costituito da intervalli della stessa lunghezza  $3^{-j}$ .

$\mathcal{R}$  deve comprendere tutti gli intervalli di  $E_j$  e perciò:

$$\sum_{R \in \mathcal{R}} |R|^s = \sum_{R \in \mathcal{R}} 3^{-js} \geq 2^j \cdot 3^{-js} = 1$$

e quindi la 2.12 vale anche per il ricoprimento  $\mathcal{I}$  di partenza. □

Introduciamo, come proposto in [5], anche una dimostrazione euristica del fatto che  $\dim_H(C) = \frac{\log 2}{\log 3}$ .

*Dimostrazione.*

Siano  $C_S = C \cap [0, \frac{1}{3}]$  e  $C_D = C \cap [\frac{2}{3}, 1]$ . Entrambe le parti  $C_S$  e  $C_D$  sono geometricamente simili a  $C$  con rapporto di similitudine pari a  $\frac{1}{3}$  e  $C$  è l'unione disgiunta di  $C_S$  e  $C_D$ . Allora, sfruttando la 2.2.13, per ogni  $s$  si ha :

$$\mathcal{H}^s(C) = \mathcal{H}^s(C_S) + \mathcal{H}^s(C_D) = \left( \frac{1}{3} \right)^s \mathcal{H}^s(C) + \left( \frac{1}{3} \right)^s \mathcal{H}^s(C) \quad (2.13)$$

Assumiamo che per il valore critico  $s = \dim_H C$  la misura  $\mathcal{H}^s(C)$  sia finita. Questa assunzione è del tutto ammissibile considerando ciò che abbiamo già dimostrato rigorosamente. Allora dividendo la 2.13 per  $\mathcal{H}^s(C)$  si ha:  $1 = 2 \left( \frac{1}{3} \right)^s$  da cui  $s = \frac{\log 2}{\log 3}$ . □

La linea seguita in questa dimostrazione fornisce in realtà un metodo generale per il calcolo della dimensione di Hausdorff di molti insiemi frattali. Infatti più in generale se

$$F = \bigcup_{i=1}^m F_i$$

dove ogni  $F_i$  è simile a  $F$  ma ridotto di un fattore  $c_i$  e se gli  $F_i$ , in un certo senso, "non si sovrappongono troppo", allora la dimensione  $\dim_H F$  è pari al numero  $s$  che soddisfa la seguente condizione:

$$\sum_{i=1}^m c_i^s = 1$$

Illustreremo questo metodo in maniera rigorosa nel paragrafo 2.3.2.

### 2.2.3 Dimensione di Minkowski

Esistono diverse altre definizioni di dimensione che sono largamente usate nella teoria dei frattali, in questo paragrafo ci limiteremo a citare soltanto la *dimensione di Minkowski* che ci sarà utile nel seguito. La dimensione di Minkowski è una delle più popolari definizioni di dimensione, poichè è facile sia calcolarla matematicamente che stimarla empiricamente. In letteratura la dimensione di Minkowski viene spesso denominata *box-counting dimension* o semplicemente *box-dimension*.

**Definizione 2.2.23** (Dimensione di Minkowski).

Sia  $F$  un sottoinsieme non vuoto e limitato di  $\mathbb{R}^n$  e sia  $N_\delta(F)$  il più piccolo numero di insiemi di diametro al più  $\delta$  che ricoprono  $F$ .

Definiamo la *dimensione di Minkowski inferiore* e la *dimensione di Minkowski superiore* di  $F$  rispettivamente come:

$$\underline{\dim}_M(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \quad (2.14)$$

$$\overline{\dim}_M(F) = \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \quad (2.15)$$



Se  $\underline{\dim}_M(F) = \overline{\dim}_M(F)$ , allora si definisce *dimensione di Minkowski di  $F$* :

$$\dim_M(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \quad (2.16)$$

Esistono diverse definizioni equivalenti della dimensione di Minkowski a seconda della scelta degli insiemi utilizzati per definire  $N_\delta(F)$ .

#### **Definizioni equivalenti 2.2.24.**

Sia  $F$  un sottoinsieme non vuoto e limitato di  $\mathbb{R}^n$ . Definiamo  $\underline{\dim}_M(F)$  e  $\overline{\dim}_M(F)$  rispettivamente come in 2.14 e 2.15 e se esse coincidono definiamo  $\dim_M(F)$  come in 2.16, dove  $N_\delta(F)$  è uno dei seguenti:

- (a) il più piccolo numero di palle chiuse di raggio  $\delta$  che ricoprono  $F$
- (b) il più piccolo numero di cubi di lato  $\delta$  che ricoprono  $F$
- (c) il più piccolo numero di insiemi di diametro al più  $\delta$  che ricoprono  $F$
- (d) il più grande numero di palle disgiunte di raggio  $\delta$  con centro in  $F$

La lista potrebbe essere ulteriormente estesa, ma nella pratica si utilizza la definizione più conveniente per una particolare applicazione.

### **2.2.4 Relazione tra la dimensione di Hausdorff e la dimensione di Minkowski**

Se  $F \subset \mathbb{R}^n$  può essere ricoperto da  $N_\delta(F)$  insiemi di diametro  $\delta$ , allora dalla definizione 2.5 risulta:

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) \leq N_\delta(F)\delta^s$$

Se  $1 < \mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(F)$ , allora  $\log N_\delta(F) + s \log \delta > 0$  per  $\delta$  è sufficientemente piccolo. Dunque  $s \leq \underline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}$  e allora:

$$\dim_H F \leq \underline{\dim}_M F \leq \overline{\dim}_M F \quad (2.17)$$

In generale non abbiamo l'uguaglianza, sebbene le due dimensioni siano uguali per molti insiemi sufficientemente regolari.

Dalla definizione 2.16 abbiamo che:

$$N_\delta(F)\delta^s \rightarrow \infty \quad \text{se } s < \dim_M F$$

(2.18)

$$N_\delta(F)\delta^s \rightarrow 0 \quad \text{se } s > \dim_M F$$

Confrontiamo allora:

$$N_\delta(F)\delta^s = \inf \left\{ \sum_i \delta^s : \text{con } (U_i) \delta - \text{ricoprimento di } F \right\}$$

con

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) = \inf \left\{ \sum_i |U_i|^s : \text{con } (U_i) \delta - \text{ricoprimento di } F \right\}$$

e osserviamo che nel calcolare la dimensione di Hausdorff, diamo un peso differente  $|U_i|^s$  a ciascun insieme  $U_i$  del ricoprimento, invece per la dimensione di Minkowski usiamo lo stesso peso  $\delta^s$  per ogni insieme ricoprente. Possiamo dunque pensare che la dimensione di Minkowski indica l'efficienza con la quale un insieme possa essere ricoperto da piccoli insiemi della stessa grandezza, mentre la dimensione di Hausdorff coinvolge ricoprimenti costituiti da insiemi di grandezza piccola ma largamente variabile. La facilità di calcolo della dimensione di Minkowski rispetto a quella di Hausdorff deriva proprio dal fatto che è determinata da ricoprimenti con insiemi della stessa grandezza. Proponiamo anche qui l'insieme di Cantor come oggetto di un esempio di calcolo della dimensione di Minkowski.

**Teorema 2.2.25** (Dimensione di Minkowski dell'insieme di Cantor).

*Sia  $C$  l'insieme ternario di Cantor. Allora  $\dim_M C = \frac{\log 2}{\log 3}$*

*Dimostrazione.*

Consideriamo il ricoprimento costituito dai  $2^k$  intervalli di lunghezza  $3^{-k}$  che

costituiscono  $E_k$ . Se  $3^{-k} < \delta \leq 3^{-k+1}$ , allora abbiamo che:  $N_\delta(C) \leq 2^k$ .

Dalla 2.15 otteniamo:

$$\overline{\dim}_M C = \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(C)}{-\log \delta} \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\log 2^k}{\log 3^{k-1}} = \frac{\log 2}{\log 3}$$

Inoltre ogni intervallo di lunghezza  $\delta$  con  $3^{-k-1} \leq \delta < 3^{-k}$  interseca al più uno dei  $2^k$  intervalli basilari di lunghezza  $3^{-k}$  usati nella costruzione di  $C$ .

Pertanto ci sono almeno  $2^k$  intervalli di lunghezza  $\delta$  che ricoprono  $C$  e quindi:  $N_\delta(C) \geq 2^k$  da cui ricaviamo che:  $\underline{\dim}_M C \geq \frac{\log 2}{\log 3}$ .

□

Introduciamo ora un risultato basilare nell'ambito del calcolo delle dimensioni dei frattali. Come abbiamo già osservato nella dimostrazione del teorema 2.2.21, è sempre più facile ricavare una stima superiore della dimensione di Hausdorff  $s$  di un insieme piuttosto che quella inferiore. Infatti per ottenere una stima superiore è sufficiente maggiorare la somma  $\sum_i |U_i|^s$  per uno specifico ricoprimento  $(U_i)$  di  $F$ , mentre per fornire una stima inferiore della dimensione di Hausdorff dobbiamo mostrare che  $\sum_i |U_i|^s$  è maggiore di qualche costante positiva per tutti i  $\delta$ -ricoprimenti di  $F$ . Inoltre nel calcolo della dimensione di Hausdorff, a differenza di quando cerchiamo la dimensione di Minkowski, dobbiamo considerare non solo ricoprimenti costituiti da insiemi di diametro molto piccolo ma anche insiemi con diametro relativamente grande. Un modo di aggirare questo ostacolo è mostrare che nessun singolo insieme  $U$  può ricoprire "troppo"  $F$ , rispetto alla quantità  $|U|^s$  e dunque che, se  $(U_i)$  è un ricoprimento di  $F$ , la somma  $\sum_i |U_i|^s$  non può essere troppo piccola. Più precisamente l'idea alla base di questo espediente è quella di considerare una misura  $\mu$  concentrata su  $F$  e confrontare  $\mu(U)$  con  $|U|^s$  per ogni  $U$  che ricopre  $F$ .

**Teorema 2.2.26** (Principio di distribuzione di massa).

Siano  $F \subset \mathbb{R}^n$  e  $\mu$  una misura su  $F$  tale che  $0 < \mu(F) < \infty$ . Supponiamo che per qualche  $s$  esistano  $c > 0$  e  $\delta > 0$  tali che:

$$\mu(U) \leq c|U|^s$$

per tutti gli insiemi  $U$  con  $|U| \leq \delta$ . Allora:

$$\mathcal{H}^s(F) \geq \frac{\mu(F)}{c}$$

e

$$s \leq \dim_H F \leq \underline{\dim}_M F \leq \overline{\dim}_M F$$

*Dimostrazione.*

Se  $(U_i)$  è un qualunque ricoprimento di  $F$  allora:

$$0 < \mu(F) = \mu\left(\bigcup_i U_i\right) \leq \sum_i \mu(U_i) \leq \sum_i |U_i|^s$$

Prendendo l'estremo inferiore abbiamo che:

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) \geq \frac{\mu(F)}{c}$$

passando al limite per  $\delta \rightarrow 0$  si ottiene che:

$$\mathcal{H}^s(F) \geq \frac{\mu(F)}{c}$$

□

**Esempio 2.2.27.** Ritorniamo ancora all'insieme di Cantor  $C$ . Sia  $\mu$  la misura su  $C$  tale che ai  $2^k$  intervalli basilari di lunghezza  $3^{-k}$  in  $E_k$  venga attribuita una misura totale di  $2^k$ . Sia  $U$  un insieme tale che:  $|U| < 1$  e sia  $k$  l'intero tale che  $3^{-k-1} \leq |U| < 3^{-k}$ . Allora  $U$  può intersecare al più uno degli intervalli di  $E_k$  e quindi:

$$\mu(U) \leq 2^k = (3^{-k})^{\log 2 / \log 3} \leq (3|U|)^{\log 2 / \log 3}$$

e quindi  $\mathcal{H}^{\log 2 / \log 3}(F) > 0$  allora per il teorema 2.2.26 si ha  $\dim_H F \geq \frac{\log 2}{\log 3}$ .

## 2.3 Frattali definiti da IFS

### 2.3.1 Sistema di funzioni iterate

Introduciamo un metodo di costruzione per alcuni frattali che sfrutta la loro autosimilarità, cioè la proprietà di essere costituiti da parti simili all'intero frattale. Questa tecnica viene indicata con la sigla IFS, in inglese *Iterated Function System*, da noi tradotto *Sistema di funzioni iterate*. Diamo prima di tutto delle definizioni basilari.

Siano  $G \subset \mathbb{R}^n$  chiuso e  $\mathcal{K}$  la classe dei sottoinsiemi non vuoti compatti di  $G$ .

**Notazione 2.3.1.** Con  $\|\cdot\|$  intendiamo la norma in  $\mathbb{R}^n$ .

**Definizione 2.3.2.** Un'applicazione  $S : G \rightarrow G$  è detta *contrazione su  $G$*  se esiste un numero  $c$  con  $0 < c < 1$  tale che:

$$\|S(x) - S(y)\| \leq c\|x - y\| \text{ per ogni } x, y \in G$$

Se vale l'uguaglianza, cioè:

$$\|S(x) - S(y)\| = c\|x - y\| \text{ per ogni } x, y \in G$$

allora  $S$  è detta *similitudine o omotetia* e  $c$  viene detto *rapporto di similitudine*.

**Definizione 2.3.3.** Siano  $S_1, \dots, S_m$  contrazioni su  $G$ . Un sottoinsieme  $F$  di  $G$  è detto *invariante rispetto alla famiglia di trasformazioni  $(S_i)$*  per  $i = 1, \dots, m$  se:

$$F = \bigcup_{i=1}^m S_i(F) \tag{2.19}$$

In particolare un insieme invariante rispetto a una famiglia di similitudini viene detto *insieme autosimile*.

**Notazione 2.3.4.** Dato un insieme  $A \in \mathcal{K}$  indichiamo con:

$$[A]_\delta = \left\{ x \in G : \|x - a\| \leq \delta \text{ per qualche } a \in A \right\}$$

**Definizione 2.3.5** (Distanza di Hausdorff). Dati due insiemi  $A, B \in \mathcal{K}$ , definiamo la distanza di Hausdorff  $d_H(A, B)$  tra questi due insiemi come:

$$d_H(A, B) = \inf\{\delta : A \subset [B]_\delta \text{ e } B \subset [A]_\delta\} \quad (2.20)$$

**Proposizione 2.3.6.** La distanza di Hausdorff  $d_H$  è una metrica su  $\mathcal{K}$ .

*Dimostrazione.*

Dalla definizione seguono direttamente le proprietà di non negatività e simmetria per  $d_H$ . Proviamo la disuguaglianza triangolare.

Siano  $A, B, C \in \mathcal{K}$ , posto  $r' = d_H(A, B)$  e  $r'' = d_H(B, C)$ , valgono le seguenti inclusioni:

$$A \subset [B]_{r'}, \quad B \subset [A]_{r'}, \quad B \subset [C]_{r''}, \quad C \subset [B]_{r''}.$$

Ne deduciamo che:

$$A \subset [C]_{r'+r''} \quad \text{e} \quad C \subset [A]_{r'+r''}$$

concludendo così che  $d_H(A, C) \leq r' + r''$ .

Mostriamo infine che  $d_H(A, B) = 0$  sse  $A = B$ . Se  $d_H(A, B) = 0$  allora valgono:  $A \subset \bar{B}$  e  $B \subset \bar{A}$ , essendo per ipotesi  $A$  e  $B$  chiusi, si ha necessariamente  $A = B$ .

□

Mostriamo adesso che una famiglia di contrazioni definisce un unico insieme non vuoto compatto invariante rispetto ad essa. Lo strumento che utilizzeremo per ottenere questo risultato è il teorema delle contrazioni di Banach-Caccioppoli. Prima di applicarlo occorre introdurre alcuni lemmi.

**Lemma 2.3.7.** *Sia  $(K_n)$  una successione non crescente di insiemi in  $\mathcal{K}$  e sia*

$$F = \bigcap_{k=1}^{\infty} K_n$$

*allora  $F \in \mathcal{K}$  e  $(K_n)$  converge a  $F$  rispetto alla metrica  $d_H$ .*

*Dimostrazione.*

Per come è stato definito  $F$  è compatto e non vuoto. Dimostriamo la convergenza di  $(K_n)$  a  $F$  rispetto a  $d_H$ , cioè verifichiamo che per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un indice  $n'$  tale che  $d_H(K_n, F) \leq \varepsilon$  per ogni  $n \geq n'$ . Essendo  $F \subseteq K_n \subseteq [K_n]_\varepsilon$  per ogni  $\varepsilon > 0$  e  $n$ , dobbiamo dimostrare solo che, per ogni  $\varepsilon > 0$ , esiste  $n'$  tale che  $K_n \subset [F]_\varepsilon$  per ogni  $n \geq n'$ . Supponiamo per assurdo che esistano  $\varepsilon > 0$  e una successione strettamente crescente di indici  $(n_i)$  tali che  $K_{n_i} \not\subset [F]_\varepsilon$  per ogni  $i$ . Per ogni  $i$  sia  $x_i \in K_{n_i} \setminus [F]_\varepsilon$ , allora  $d_H(x_i, F) > \varepsilon$  per ogni  $i$ . Poiché  $x_i \in K_1$  per ogni  $i$ , dalla compattezza di  $K_1$ , segue che possiamo estrarre una sottosuccessione  $(x_{i_j})$  convergente a un punto  $x \in K_1$ . Allora, per ogni  $n$ , si ha che  $x \in K_n$ , poichè  $x_{i_j} \in K_n$  per  $j$  abbastanza grande e  $K_n$  è chiuso. Segue dunque che  $x \in F$ , ma anche che  $d_H(x, F) = \lim_{j \rightarrow \infty} d_H(x_{i_j}, F) \geq \varepsilon$ , dunque otteniamo una contraddizione.

□

**Lemma 2.3.8.** *Lo spazio metrico  $(\mathcal{K}, d_H)$  è uno spazio metrico completo.*

*Dimostrazione.*

Sia  $(K_n)$  una successione di Cauchy. Poniamo:

$$K'_n = \overline{\bigcup_{i \geq n} K_i} \quad e \quad K = \bigcap_{n=1}^{\infty} K'_n$$

Essendo  $(K_n)$  limitata, esiste  $r > 0$  tale che  $d_H(K_n, K_1) \leq r$  per ogni  $n$ , per cui tutti i  $K_n$  sono inclusi in uno stesso insieme limitato e ognuno dei  $K'_n$  è

limitato. Allora ogni  $K'_n$  è anche compatto. Per il lemma 2.3.7 abbiamo che  $K \in \mathcal{K}$  e che la successione  $K'_n$  converge a  $K$  rispetto a  $d_H$ . Per ottenere la tesi basta dimostrare che:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_H(K_n, K'_n) = 0$$

Preso  $\varepsilon > 0$ , si fissi  $n'$  tale che  $d_H(K_i, K_n) \leq \varepsilon$  per ogni  $i, n \geq n'$ . Per  $n \geq n'$  si ha  $K_n \subseteq K'_n \subseteq [K'_n]_\varepsilon$ . Inoltre per  $i \geq n$ , si ha  $d_H(K_i, K_n) \leq \varepsilon$  da cui  $K_i \subseteq [K_n]_\varepsilon$ . Dunque otteniamo che:

$$\bigcup_{i \geq n} K_i \subseteq [K_n]_\varepsilon$$

e quindi anche  $K'_n \subseteq [K_n]_\varepsilon$ , da cui  $d_H(K_n, K'_n) \leq \varepsilon$ . □

**Lemma 2.3.9.** *Siano  $A_j, B_j \in \mathcal{K}$  per  $j = 1, \dots, m$  e si ponga*

$$A = \bigcup_{j=1}^m A_j \quad e \quad B = \bigcup_{j=1}^m B_j$$

Allora  $d_H(A, B) \leq \max_{1 \leq j \leq m} d_H(A_j, B_j)$ .

*Dimostrazione.*

Poniamo  $r_j = d_H(A_j, B_j)$  e  $r = \max_{1 \leq j \leq m} r_j$ . Allora per ogni  $j$  si hanno:

$$A_j \subseteq [B_j]_{r_j} \subseteq [B]_r$$

$$B_j \subseteq [A_j]_{r_j} \subseteq [A]_r$$

da cui  $A \subseteq [B]_r$  e  $B \subseteq [A]_r$ , dunque la tesi. □

**Teorema 2.3.10.** *Siano  $S_1, \dots, S_m$  contrazioni su  $G \subset \mathbb{R}^n$ , cioè tali che:*

$$\|S_i(x) - S_i(y)\| \leq c_i \|x - y\| \quad \text{per } x, y \in G$$



con  $c_i < 1$  per ogni  $i$ . Allora esiste un unico insieme non vuoto compatto  $F$  invariante rispetto alle  $S_i$  per ogni  $i$ :

$$F = \bigcup_{i=1}^m S_i(F)$$

Inoltre preso  $E \in \mathcal{K}$  tale che  $S_i(E) \subset E$ , se definiamo una trasformazione  $S$  come:

$$S(E) = \bigcup_{i=1}^m S_i(E)$$

e se consideriamo la successione  $(S^n(E))$  definita da:

$$S^0(E) = E \text{ e } S^{n+1}(E) = S(S^n(E)) \text{ per } n \geq 0$$

allora risulta:

$$F = \bigcap_{n=1}^{\infty} S^n(E)$$

*Dimostrazione.*

Applicando il teorema delle contrazioni e il lemma 2.3.8, per ottenere la tesi è sufficiente verificare che  $S$  manda  $\mathcal{K}$  in sè stesso ed è una contrazione rispetto alla metrica  $d_H$ . Se  $E \in \mathcal{K}$  tale che  $S_i(E) \subset E$  per ogni  $i$ , allora  $S_i(E) \in \mathcal{K}$  per ogni  $i$ , da cui  $S(E) \in \mathcal{K}$ . Siano ora  $A, B \in \mathcal{K}$  e  $r = d_H(A, B)$ , allora  $A \subseteq [B]_r$  e  $B \subseteq [A]_r$ . Ne segue che:

$$S_i(A) \subseteq [S_i(B)]_{c_i r} \text{ e } S_i(B) \subseteq [S_i(A)]_{c_i r} \text{ per } i = 1, \dots, m$$

cioè  $d_H(S_i(A), S_i(B)) \leq c_i r$  per ogni  $i$ .

Per il lemma 2.3.9 abbiamo allora:

$$d_H(S(A), S(B)) \leq \max_{1 \leq i \leq m} d_H(S_i(A), S_i(B)) \leq c \cdot r = c \cdot d_H(A, B) \quad (2.21)$$

dove abbiamo posto

$$c = \left( \max_{1 \leq i \leq m} c_i \right)$$

Dalla 2.21 abbiamo la tesi, poichè risulta  $c < 1$ .

□

**Notazione 2.3.11.**

L'insieme  $E$  di partenza viene detto *iniziatore* e corrisponde all'iterazione  $S^0(E) = E$ . L'insieme  $S^n(E)$  che si ottiene fermando la costruzione al passo  $n$ -esimo è chiamato *pre-frattale* e rappresenta un'approssimazione del frattale  $F$  convergente a  $F$  stesso, poichè si ha:  $d_H(S^n(E), F) \rightarrow 0$ .

**2.3.2 Dimensione di insiemi autosimili**

Uno dei vantaggi del metodo della funzione iterata è che la dimensione degli insiemi invarianti IFS è spesso calcolabile in maniera molto semplice a partire dalle contrazioni che lo definiscono. In questo paragrafo prenderemo in considerazione insiemi autosimili (definizione 2.3.3) costruiti tramite il metodo della funzione iterata. Celebri esempi di insiemi di questo genere sono l'insieme di Cantor, la curva di Von Koch e il triangolo di Sierpinski. Consideriamo le  $m$  similitudini  $S_1, \dots, S_m: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , ciascuna di rapporto  $c_i$ , dove  $0 < c_i < 1$  per ogni  $i$ . Sia  $F$  l'insieme autosimile generato dalle similitudini date. Mostriamo che, sotto alcune condizioni,  $F$  ha sia la misura di Hausdorff che quella di Minkowski pari ad  $s$ , il cui valore è dato dalla seguente:

$$\sum_{i=1}^m c_i^s = 1 \tag{2.22}$$

e che  $F$  ha misura finita e positiva.

Un calcolo euristico, simile a quello proposto alla fine del paragrafo 2.2.2, prova la plausibilità di questo risultato. Infatti se richiediamo su  $F = \bigcup_{i=1}^m S_i(F)$  una condizione che garantisce che gli  $S_i(F)$  "non si sovrappongono troppo", allora, usando la definizione di similitudine  $S_i$  di rapporto  $c_i$  e la 2.2.13, abbiamo che:

$$\mathcal{H}^s(F) = \sum_{i=1}^m \mathcal{H}^s(S_i(F)) = \sum_{i=1}^m c_i^s \mathcal{H}^s(F)$$

Da questa relazione, assumendo che la  $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$ , otteniamo che  $s$  è la soluzione di 2.22.

Definiamo ora rigorosamente la condizione che ci assicura che gli  $S_i(F)$  "non si sovrappongono troppo":

**Definizione 2.3.12** (Condizione dell'insieme aperto).

*Si dice che una famiglia di similitudini  $S_1, \dots, S_m: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  soddisfa la condizione dell'insieme aperto se esiste un aperto non vuoto e limitato  $V$  tale che:*

$$V \supset \bigcup_{i=1}^m S_i(V) \quad (2.23)$$

dove gli  $S_i(V)$  sono disgiunti per  $i = 1, \dots, m$ .

Prima di dimostrare con precisione che se le similitudini  $S_i$  soddisfano la condizione dell'insieme aperto allora la dimensione di Hausdorff e quella di Minkowski sono date dalla 2.22, è necessario introdurre il seguente:

**Lemma 2.3.13.** *Sia  $V_i$  una collezione di sottoinsiemi aperti disgiunti di  $\mathbb{R}^n$  tale che ogni  $V_i$  contiene una palla di raggio  $a_1 r$  ed è contenuta in una palla di raggio  $a_2 r$ . Allora ogni palla  $B$  di raggio  $r$  interseca al più  $(1 + 2a_2)^n a_1^{-n}$  delle chiusure  $\overline{V}_i$ .*

*Dimostrazione.*

Se  $\overline{V}_i$  interseca la palla  $B$ , allora  $\overline{V}_i$  è contenuta nella palla che ha lo stesso centro di  $B$  e raggio  $(1+2a_2)r$ . Supponiamo che  $q$  delle chiusure  $\overline{V}_i$  intersecano  $B$ . Allora sommando i volumi delle parti interne delle palle di raggio  $a_1 r$  contenute in ognuno di questi  $\overline{V}_i$ , si ha:  $q(a_1 r)^n \leq (1 + 2a_2)^n r^n$  da cui la tesi.

□

**Teorema 2.3.14.** *Consideriamo le  $m$  similitudini  $S_1, \dots, S_m: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , ciascuna di rapporto  $c_i$ , dove  $0 < c_i < 1$  per ogni  $i$  e supponiamo che questa*

famiglia di similitudini soddisfi la condizione dell'insieme aperto. Se  $F$  è l'insieme invariante rispetto alle  $S_i$  tale che:

$$F = \bigcup_{i=1}^m S_i(F) \quad (2.24)$$

allora  $\dim_H F = \dim_M F = s$ , dove  $s$  è data da:

$$\sum_{i=1}^m c_i^s = 1 \quad (2.25)$$

Inoltre per questo valore  $s$  si ha che  $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$ .

*Dimostrazione.*

Sia  $s$  tale che sia valga la 2.25. Per ogni insieme  $A$  indichiamo con

$$A_{i_1 \dots i_k} = S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k}(A)$$

e con  $J_k$  l'insieme di tutte le sequenze di  $k$  termini  $(i_1, \dots, i_k)$  con  $1 \leq i_j \leq m$ . Applicando ripetutamente la 2.24 si ha che  $F = \bigcup_{J_k} F_{i_1, \dots, i_k}$ . Mostriamo che questi insiemi che ricoprono  $F$  forniscono una stima superiore per la misura di Hausdorff. Essendo l'applicazione  $S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k}$  una similarità di rapporto  $c_{i_1} \dots c_{i_k}$ , otteniamo:

$$\sum_{J_k} |F_{i_1 \dots i_k}|^s = \sum_{J_k} (c_{i_1} \dots c_{i_k})^s |F|^s = \left( \sum_{i_1} c_{i_1}^s \right) \cdots \left( \sum_{i_k} c_{i_k}^s \right) |F|^s = |F|^s$$

Per ogni  $\delta > 0$  possiamo scegliere  $k$  tale che  $|F_{i_1 \dots i_k}| \leq \delta$ , pertanto risulta che  $\mathcal{H}_\delta^s(F) \leq |F|^s$ . Passando al limite per  $\delta \rightarrow 0$  si ha:

$$\mathcal{H}^s(F) \leq |F|^s$$

Più complicato è determinare una stima inferiore. Siano:

$$I = \{(i_1, i_2, \dots): 1 \leq i_j \leq m\} = \prod_{j=1}^m \{i_1, i_2, \dots, i_m\}$$

$$I_{i_1, \dots, i_k} = \{(i_1, \dots, i_k, q_{k+1}, \dots): 1 \leq q_j \leq m\}$$

$I_{i_1, \dots, i_k}$  rappresenta il cilindro costituito dalle successioni di  $I$  con termine iniziale  $(i_1, \dots, i_k)$ . Possiamo definire una misura  $\mu$  su  $I$  tale che sia:

$\mu(I_{i_1, \dots, i_k}) = (c_{i_1} \dots c_{i_k})^s$ . Usando la 2.25 abbiamo che:

$$(c_{i_1} \dots c_{i_k})^s = (c_{i_1} \dots c_{i_k})^s \sum_{i=1}^m c_i^s = \sum_{i=1}^m (c_{i_1} \dots c_{i_k} c_i)^s$$

allora risulta  $\mu(I_{i_1, \dots, i_k}) = \sum_{i=1}^m (c_{i_1} \dots c_{i_k} c_i)^s$ . Inoltre

$$\mu(I) = \sum_{i=1}^m \mu(I_i) = \sum_{i=1}^m c_i^s = 1$$

essendo in particolare  $\mu(I_i) = c_i^s$ . Possiamo trasferire  $\mu$  su  $F$  definendo per ogni  $A \subset F$ :

$$\tilde{\mu}(A) = \mu\{(i_1, i_2, \dots): x_{i_1, i_2, \dots} \in A\}$$

dove  $x_{i_1, i_2, \dots} = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_{i_1, \dots, i_k} = F_{i_1} \cap F_{i_1 i_2} \cap F_{i_1 i_2 i_3} \cap \dots \cup F_{i_1 i_2 i_3 \dots i_k \dots} \cup \dots$

e quindi risulta  $\tilde{\mu}(F) = 1$ .

Mostriamo che la  $\tilde{\mu}$  soddisfa il principio 2.2.26. Sia  $V$  l'insieme aperto e limitato che verifica la condizione dell'insieme aperto 2.23. Essendo  $\bar{V}$  un compatto e

$$\bar{V} \supset S(\bar{V}) = \bigcup_{i=1}^m S_i(\bar{V})$$

la successione decrescente delle iterate  $S^k(\bar{V})$  converge a  $F$  per il teorema 2.3.10. In particolare  $F \subset \bar{V}$  e  $F_{i_1 \dots i_k} \subset \bar{V}_{i_1 \dots i_k}$  per ogni sequenza finita  $(i_1 \dots i_k)$ . Sia  $B$  una qualunque palla di raggio  $r < 1$ . Stimiamo  $\tilde{\mu}(B)$  considerando gli insiemi  $V_{i_1 \dots i_k}$  con diametro confrontabile con quello di  $B$  e con chiusura  $\overline{V_{i_1 \dots i_k}}$  intersecante  $F \cap B$ . Tronchiamo ogni successione  $(i_1, i_2, \dots) \in I$  dopo il primo termine  $i_k$  per il quale

$$(\min_i c_i)r \leq c_{i_1} \dots c_{i_k} \leq r \tag{2.26}$$

e indichiamo con  $Q$  l'insieme di tutte le sequenze finite ottenute in questo modo. Allora per ogni successione  $(i_1, i_2, \dots) \in I$  c'è esattamente un valore di  $k$  tale che  $(i_1 \dots i_k) \in Q$ . Da questo fatto segue che se  $x_{i_1, i_2, \dots} \in F$  allora esiste un unico  $k$  tale che

$$x_{i_1, i_2, \dots} \in \bigcup_Q F_{i_1 \dots i_k}$$

Inoltre poichè  $V_1, \dots, V_m$  sono disgiunti per la condizione dell'insieme aperto, lo sono anche  $V_{i_1 \dots i_{k1}}, \dots, V_{i_1 \dots i_{km}}$  per ogni sequenza  $(i_1, \dots, i_k)$ . Ne segue che la collezione degli insiemi aperti  $\{V_{i_1 \dots i_k} : (i_1, \dots, i_k) \in Q\}$  è costituita da insiemi disgiunti. In definitiva:

$$F \subset \bigcup_Q F_{i_1, \dots, i_k} \subset \bigcup_Q \overline{V_{i_1 \dots i_k}} \quad (2.27)$$

Scegliamo  $a_1$  e  $a_2$  tali che  $V$  contenga una palla di raggio  $a_1$  e sia contenuta in una palla di raggio  $a_2$ . Allora, per  $(i_1, \dots, i_k) \in Q$ , l'insieme  $V_{i_1 \dots i_k}$  contiene una palla di raggio  $c_{i_1} \dots c_{i_k} a_1$  e dunque dalla 2.26 contiene una palla di raggio  $(\min_i c_i) a_1 r$ . Inoltre, sempre per  $(i_1, \dots, i_k) \in Q$ , l'insieme  $V_{i_1 \dots i_k}$  è contenuto in una palla di raggio  $c_{i_1} \dots c_{i_k} a_2$  e quindi in una palla di raggio  $a_2 r$ . In pratica abbiamo

$$B_{(\min_i c_i) a_1 r} \subset B_{c_{i_1} \dots c_{i_k} a_1} \subset V_{i_1 \dots i_k} \subset B_{c_{i_1} \dots c_{i_k} a_2} \subset B_{a_2 r}$$

dove  $B_p$  indica una palla di raggio  $p$ .

Sia  $Q_1$  l'insieme delle sequenze  $(i_1, \dots, i_k) \in Q$  tali che  $B$  interseca  $\overline{V_{i_1 \dots i_k}}$ , cioè  $Q_1 = \{(i_1, \dots, i_k) \in Q : B \cap \overline{V_{i_1 \dots i_k}}\} \subset Q$ . Per il lemma 2.3.13 ci sono al più  $q = (1 + 2a_2)^n a_1^{-n} (\min_i c_i)^{-n}$  sequenze in  $Q_1$ , allora otteniamo che:

$$\tilde{\mu}(B) = \tilde{\mu}(F \cap B) = \mu\{(i_1, i_2, \dots) : x_{i_1, i_2, \dots} \in F \cap B\} \leq \mu\left(\bigcup_{Q_1} I_{i_1, \dots, i_k}\right)$$

In particolare l'ultima disuguaglianza vale, poichè se per la 2.27 si ha  $x_{i_1, i_2, \dots} \in F \cap B \subset \bigcup_Q \overline{V_{i_1, \dots, i_k}}$  allora esiste un unico  $k$  tale che  $(i_1, \dots, i_k) \in Q_1$ .

Dunque:

$$\tilde{\mu}(B) \leq \sum_{Q_1} \mu(I_{i_1 \dots i_k}) = \sum_{Q_1} (c_{i_1} \dots c_{i_k})^s \leq \sum_{Q_1} r^s \leq r^s q$$

Poichè ogni insieme  $U$  è contenuto in una palla di raggio  $|U|$ , dalla relazione precedente si ha  $\tilde{\mu}(U) \leq q|U|^s$ . Allora per il principio 2.2.26 risulta che:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^s(F) &\geq \frac{\tilde{\mu}(F)}{q} = \frac{1}{q} > 0 \\ s &\leq \dim_H F \leq \underline{\dim}_M F \leq \overline{\dim}_M F \end{aligned}$$

Finora abbiamo mostrato quindi che  $\dim_H F = s$ , per completare la dimostrazione resta da vedere che  $\overline{\dim}_M F \leq s$ . Sia  $Q$  un qualunque insieme di sequenze finite che gode della seguente proprietà: per ogni successione  $(i_1, i_2, \dots) \in I$  esiste un unico  $k$  tale che  $(i_1, \dots, i_k) \in Q$  e osserviamo che i cilindri  $I_{i_1, \dots, i_k}$  indicizzati dagli elementi di  $Q$  sono disgiunti. Scegliamo ora  $Q$  come nella 2.26 e mostriamo che  $I = \bigcup_Q I_{i_1, \dots, i_k}$ . Preso  $\underline{i} = (i_1, i_2, \dots)$ , infatti, sappiamo che esiste un unico  $k$  tale che  $(\min_i c_i)r \leq c_{i_1} \dots c_{i_k} \leq r$  e quindi abbiamo  $\underline{i} \in I_{i_1, \dots, i_k}$ . Pertanto:

$$\mu\left(\bigcup_Q I_{i_1, \dots, i_k}\right) = \mu(I) \Rightarrow \sum_Q (c_{i_1} \dots c_{i_k})^s = 1$$

Sfruttando la 2.26 segue che:

$$1 = \sum_Q (c_{i_1} \dots c_{i_k})^s \geq (\min_i c_i)^s r^s q \Rightarrow q \leq (\min_i c_i)^{-s} r^{-s}$$

dove  $q$  è il numero di sequenze contenute in  $Q$ .

Per ogni sequenza  $(i_1, \dots, i_k)$  in  $Q$  risulta quindi che:

$$|\overline{V_{i_1, \dots, i_k}}| = (c_{i_1} \dots c_{i_k})|\overline{V}| \leq r|\overline{V}|$$

allora  $F$  può essere ricoperto da al più  $(\min_i c_i)^{-s} r^{-s}$  insiemi di diametro  $r|\overline{V}|$  per ogni  $r < 1$ . Segue dalla definizione equivalente (c) di dimensione di Minkowski che  $\overline{\dim}_M F \leq s$ .

□

### Esempi 2.3.15.

**Insieme di Cantor** Consideriamo l'insieme di Cantor  $C$  (si veda 2.1.1 per la costruzione e le proprietà), esso è invariante rispetto alle trasformazioni:

$$\begin{cases} S_1(x) = \frac{1}{3}x \\ S_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \end{cases} \quad (2.28)$$

dove  $S_1$  è un'omotetia di rapporto  $\frac{1}{3}$  e  $S_2$  è un'omotetia di rapporto  $\frac{1}{3}$  composta una traslazione di  $\frac{2}{3}$ .  $C$  soddisfa la condizione dell'insieme aperto prendendo  $V = ]0, 1[$ , allora per il teorema 2.3.14 si ha che  $\dim_H C = \dim_M C = s$ , con  $s$  data da:

$$\sum_{i=1}^2 \left(\frac{1}{3}\right)^s = 1 \Rightarrow 2 = 3^s \Rightarrow s = \frac{\log 2}{\log 3}$$

**Triangolo di Sierpiński** Il triangolo di Sierpiński  $S$  (si veda 2.1.1 per la costruzione e le proprietà) è invariante rispetto alle trasformazioni:

$$\begin{cases} S_1(x, y) = \left(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y\right) \\ S_2(x, y) = \left(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}\right) \\ S_3(x, y) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}\right) \end{cases} \quad (2.29)$$

dove  $S_1$  è un'omotetia di rapporto  $\frac{1}{2}$ ,  $S_2$  è un'omotetia di rapporto  $\frac{1}{2}$  composta una traslazione di vettore  $(0, \frac{1}{2})$  e  $S_3$  è un'omotetia di rapporto  $\frac{1}{2}$  composta una traslazione di vettore  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ . Precisiamo che l'origine del riferimento è posta nel vertice in basso a sinistra del triangolo iniziatore. Poichè  $S$  soddisfa la condizione dell'insieme aperto prendendo



$V$  pari alla parte interna dell'inziatore, allora per il teorema 2.3.14 si ha che  $\dim_H S = \dim_M S = s$ , con  $s$  data da:

$$\sum_{i=1}^3 \left(\frac{1}{2}\right)^s = 1 \Rightarrow 3 = 2^s \Rightarrow s = \frac{\log 3}{\log 2}$$

**Curva di Von Koch** Esaminiamo ora la curva di Von Koch  $K$  (si veda 2.1.1 per la costruzione e le proprietà) è invariante rispetto alle trasformazioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} S_1(x, y) = \left(\frac{1}{3}x, \frac{1}{3}y\right) \\ S_2(x, y) = \left(\frac{1}{6}x - \frac{\sqrt{3}}{6}y + \frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}}{6}x + \frac{1}{6}y\right) \\ S_3(x, y) = \left(-\frac{1}{6}x + \frac{\sqrt{3}}{6}y + \frac{2}{3}, \frac{\sqrt{3}}{6}x + \frac{1}{6}y\right) \\ S_4(x, y) = \left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}, \frac{1}{3}y\right) \end{array} \right. \quad (2.30)$$

dove  $S_1$  è un'omotetia di rapporto  $\frac{1}{3}$ ,  $S_2$  è un'omotetia di rapporto  $\frac{1}{3}$  composta una rotazione di  $\frac{\pi}{3}$  in senso antiorario e una traslazione di vettore  $(\frac{1}{3}, 0)$ ,  $S_3$  è un'omotetia di rapporto  $\frac{1}{3}$  composta una rotazione di  $\frac{\pi}{3}$  in senso orario e una traslazione di vettore  $(\frac{2}{3}, 0)$  e  $S_4$  è un'omotetia di rapporto  $\frac{1}{3}$  composta una traslazione di vettore  $(\frac{2}{3}, 0)$ . Ora  $K$  soddisfa la condizione dell'insieme aperto prendendo  $V$  pari alla parte interna del triangolo isoscele di base 1 e altezza  $\frac{\sqrt{3}}{6}$  costruito sul segmento iniziatore  $[0, 1]$ , dunque per il teorema 2.3.14 si ha che  $\dim_H K = \dim_M K = s$ , con  $s$  data da:

$$\sum_{i=1}^4 \left(\frac{1}{3}\right)^s = 1 \Rightarrow 4 = 3^s \Rightarrow s = \frac{\log 4}{\log 3}$$

## Frattale con dimensione intera

*Descriviamo ora la costruzione di un frattale, che pur non avendo un nome particolare, ha per noi una certa importanza perchè costituisce un esempio di frattale avente dimensione di Hausdorff intera.*

*Consideriamo un segmento orizzontale  $F_0$  e prendiamone il terzo centrale, ruotiamolo di un angolo retto in senso antiorario attorno al suo punto medio e trasliamolo in modo che un estremo coincida col punto medio del segmento di partenza e che il segmento appena tagliato punti verso l'alto. Otteniamo così tre segmenti  $F_1^1, F_1^2, F_1^3$  e poniamo  $F_1$  pari alla loro unione. Su ciascuno dei questi tre segmenti applichiamo il procedimento appena descritto. Durante il secondo passo è necessario però porre particolare attenzione al verso nel quale vengono disposti i nuovi segmenti ottenuti tagliando il terzo centrale dei precedenti, seguiremo il criterio seguente:*

- *sul segmento a sinistra  $F_1^1$  il nuovo segmento, ruotato di  $\frac{\pi}{2}$  in senso antiorario, deve essere traslato in modo tale che un estremo coincida con il punto medio di  $F_1^1$  e l'altro estremo punti verso il basso.*
- *sul segmento centrale  $F_1^2$  il nuovo segmento, ruotato di  $\frac{\pi}{2}$  in senso antiorario, deve essere traslato in modo tale che un estremo coincida con il punto medio di  $F_1^2$  e l'altro estremo punti verso sinistra.*
- *su quello di destra  $F_1^3$  il terzo centrale, ruotato di  $\frac{\pi}{2}$  in senso antiorario, deve essere traslato in modo tale che un estremo coincida con il punto medio di  $F_1^3$  e l'altro estremo punti verso l'alto.*

*Poniamo  $F_2$  uguale all'unione dei segmenti ottenuti in totale alla fine*

del secondo passo. E così via.

Prendendo il limite  $F = \lim_{k \rightarrow \infty} F_k$ , inteso nella metrica di Hausdorff, otteniamo il frattale cercato (figura 2.10). Usando il teorema 2.3.14 ha  $\dim_H F = \dim_M F = 1$ .

Infatti è chiaro che si ottiene tramite tre trasformazioni di rapporto  $c_i = 3$  per  $i = 1, 2, 3$ . Pertanto:

$$\sum_{i=1}^3 \left(\frac{1}{3}\right)^s = 1 \Rightarrow 3 = 3^s \Rightarrow s = 1$$

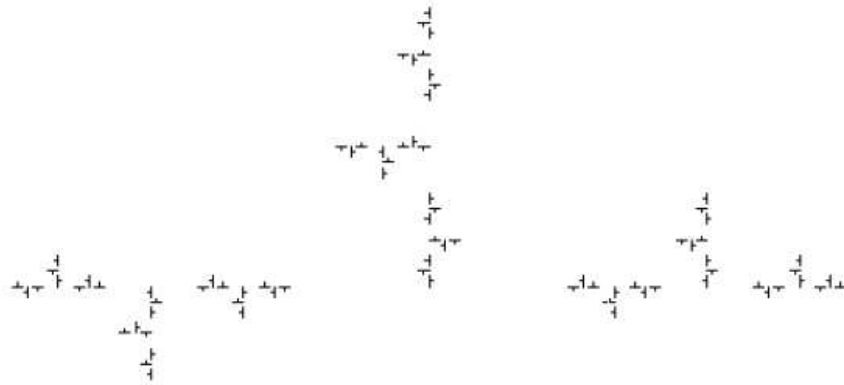


Figura 2.10: Esempio di frattale a dimensione intera

## Capitolo 3

# Distribuzione uniforme su alcuni frattali

La teoria dell'uniforme distribuzione può essere sviluppata in spazi più astratti dell'intervallo unitario e soprattutto le tecniche di costruzione di successioni uniformemente distribuite, come quella usata per ottenere la successione di partizioni di Kakutani e la successione "mille foglie" possono essere estese ad altri tipi di insiemi e in particolare ai frattali.

### 3.1 Distribuzione uniforme su spazi compatti

Oggetto del nostro studio sono i frattali IFS, che come abbiamo visto sono insiemi compatti invarianti rispetto a una famiglia di contrazioni. Pertanto in questa sezione introdurremo la teoria dell'uniforme distribuzione sugli spazi di Hausdorff compatti, limitandoci a dare semplicemente le definizioni e alcune delle proprietà fondamentali delle successioni uniformemente distribuite in questi spazi (facendo riferimento a [12]).

Sia  $X$  uno spazio di Hausdorff compatto e consideriamo gli insiemi boreliani in  $X$ , cioè gli elementi della  $\sigma$ -algebra generata dagli insiemi aperti in  $X$ .

**Definizione 3.1.1** (Misura Borel-regolare).

Una misura  $\nu$  definita sulla classe degli insiemi di Borel di  $X$  e tale che:

$$\mu(E) = \sup\{\mu(C) : C \subseteq E, C \text{ chiuso}\} = \inf\{\mu(D) : E \subseteq D, D \text{ aperto}\} \quad (3.1)$$

per tutti gli insiemi di Borel  $E$  in  $X$ , si dice Borel-regolare.

**Definizione 3.1.2** (Misura di Radon).

Una misura  $\nu$  Borel-regolare si dice misura di Radon se per ogni  $K$  compatto in  $X$  si ha  $\nu(K) < \infty$ .

Consideriamo ora una probabilità  $\mu$  regolare sui boreliani di  $X$  e quindi una misura di Radon.

**Notazione 3.1.3.** Indichiamo con:

- $\mathcal{B}(X)$  l'insieme di tutte le funzioni a valori reali, limitate e misurabili su  $X$ ;
- $\mathcal{C}(X)$  il sottoinsieme di  $\mathcal{B}(X)$  costituito da tutte le funzioni a valori reali, continue e misurabili su  $X$ .

**Osservazione 3.1.4.** Lo spazio  $\mathcal{B}(X)$  con la norma  $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$  per  $f \in \mathcal{B}(X)$  è uno spazio di Banach.

Osserviamo che tra tutte le caratterizzazioni date nel primo capitolo per l'uniforme distribuzione mod 1, quella che sembra più adattabile ad una situazione più generale è il teorema 1.1.6, che formalizziamo nella seguente definizione.

**Definizione 3.1.5.**

Una successione  $(x_n)$  di elementi di  $X$  è detta uniformemente distribuita rispetto a  $\mu$  ( $\mu$ -u.d.) in  $X$  se vale:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N f(x_n) = \int_X f d\mu \quad (3.2)$$

per ogni  $f \in \mathcal{C}(X)$ .

Così come nella teoria della distribuzione uniforme mod 1, è utile definire anche in questo caso delle famiglie determinanti.

**Definizione 3.1.6.**

Una classe  $\mathcal{F}$  di funzioni in  $\mathcal{B}(X)$  è detta determinante rispetto a  $\mu$  se per ogni successione  $(x_n)$  in  $X$ , la validità dell'equazione

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n) = \int_X f d\mu \quad \forall f \in \mathcal{F} \quad (3.3)$$

implica che la successione  $(x_n)$  è uniformemente distribuita rispetto a  $\mu$ .

Preso una classe  $\mathcal{F}$  di funzioni in  $\mathcal{B}(X)$ , indichiamo con  $\text{span}(\mathcal{F})$  il sottospazio lineare di  $\mathcal{B}(X)$  generato da  $\mathcal{F}$ . In pratica,  $\text{span}(\mathcal{F})$  è costituito da tutte le combinazioni lineari finite di elementi di  $\mathcal{F}$  con coefficienti reali. La costruzione di classi determinanti molto importanti è basata sul seguente teorema.

**Teorema 3.1.7.** *Se  $\mathcal{F}$  è una classe di funzioni di  $\mathcal{B}(X)$  tale che  $\text{span}(\mathcal{F})$  è densa in  $\mathcal{C}(X)$ , cioè se  $\overline{\text{span}(\mathcal{F})} \supseteq \mathcal{C}(X)$ , allora la classe  $\mathcal{F}$  è determinante rispetto a  $\mu$  su  $X$ .*

*Dimostrazione.*

Sia  $(x_n)$  una successione di punti di  $X$  e supponiamo che valga la 3.2 per ogni  $f \in \mathcal{F}$ . Mostriamo innanzitutto che da ciò segue che la 3.2 vale per tutte le funzioni  $g \in \text{span}(\mathcal{F})$ . Infatti  $g \in \text{span}(\mathcal{F})$  è della forma  $g = \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_k f_k$  per  $f_i \in \mathcal{F}$  e  $\alpha_i \in \mathbb{R}$ ,  $1 \leq i \leq k$ . Dunque se la 3.2 vale per ogni  $f \in \text{span}(\mathcal{F})$ , in particolare vale per tutte le  $f_i$  per  $1 \leq i \leq k$ , allora per la linearità anche la  $g$  soddisfa la 3.2.

Consideriamo ora  $f \in \mathcal{C}(X)$ , fissato  $\varepsilon > 0$ , per l'ipotesi di densità esiste  $h \in \text{span}(\mathcal{F})$  tale che  $\|f - h\| < \varepsilon$ . Allora risulta

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n) - \int_X f \, d\mu \right| &\leq \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (f - h)(x_n) - \int_X (f - h) \, d\mu \right| \\ &\quad + \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N h(x_n) - \int_X h \, d\mu \right| \\ &\leq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N |(f - h)(x_n)| + \int_X |f - h| \, d\mu \\ &\quad + \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N h(x_n) - \int_X h \, d\mu \right| \\ &\leq 2\|f - h\| + \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N h(x_n) - \int_X h \, d\mu \right| \\ &< 3\varepsilon \end{aligned}$$

per  $N$  abbastanza grande.

□

## 3.2 Successioni uniformemente distribuite su alcuni frattali

Riprendiamo ora l'idea di estendere ai frattali le tecniche di costruzione introdotte nel primo capitolo e concentriamo la nostra attenzione sugli esempi più noti di frattali IFS.

### 3.2.1 Successioni uniformemente distribuite sull'insieme di Cantor

Consideriamo l'insieme di Cantor  $C$  definito tramite le trasformazioni 2.28. Mostriamo come la tecnica che abbiamo introdotto per costruire la successione "millefoglie" nel paragrafo 1.2.2, può essere utilizzata per ottenere una successione di punti, appartenenti all'insieme  $C$ , uniformemente distribuita rispetto alla misura di Hausdorff  $s$ -dimensionale con  $s = \frac{\log 2}{\log 3}$ , che, per quanto visto nel capitolo precedente, è una probabilità (di Radon). In questo paragrafo, da ora in poi, sarà  $s = \frac{\log 2}{\log 3}$ .

Poniamo  $C_0 = [0, 1]$ . Al primo passo della costruzione siano:

$$C_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \quad e \quad C_2 = \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

gli intervalli ottenuti.

Ricaviamo i successivi quattro intervalli così come descritto in 2.1.1 e disponiamo gli intervalli ottenuti secondo l'ordine indotto dai precedenti, cioè poniamo:

$$C_3 = \left[0, \frac{1}{9}\right], \quad C_4 = \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right], \quad C_5 = \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right], \quad C_6 = \left[\frac{8}{9}, 1\right]$$



In analogia all'ordine "millefoglie" degli intervalli binari, abbiamo che al terzo passo gli otto intervalli costruiti sono ordinati come segue:

$$C_7 = \left[0, \frac{1}{27}\right], C_8 = \left[\frac{2}{3}, \frac{20}{27}\right], C_9 = \left[\frac{2}{9}, \frac{7}{27}\right], C_{10} = \left[\frac{8}{9}, \frac{25}{27}\right]$$

$$C_{11} = \left[\frac{2}{27}, \frac{1}{9}\right], C_{12} = \left[\frac{20}{27}, \frac{7}{9}\right], C_{13} = \left[\frac{8}{27}, \frac{1}{3}\right], C_{14} = \left[\frac{26}{27}, 1\right]$$

Procedendo in questo modo otteniamo una successione di intervalli opportunamente ordinati, che indichiamo con  $(C_n)$ .

Sia  $x_n$  l'estremo sinistro di ogni  $C_n$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ .

Nella seguente figura illustriamo gli intervalli  $C_n$  ed evidenziamo l'ordine in cui i punti della successione vengono disposti nei primi tre passi della costruzione.

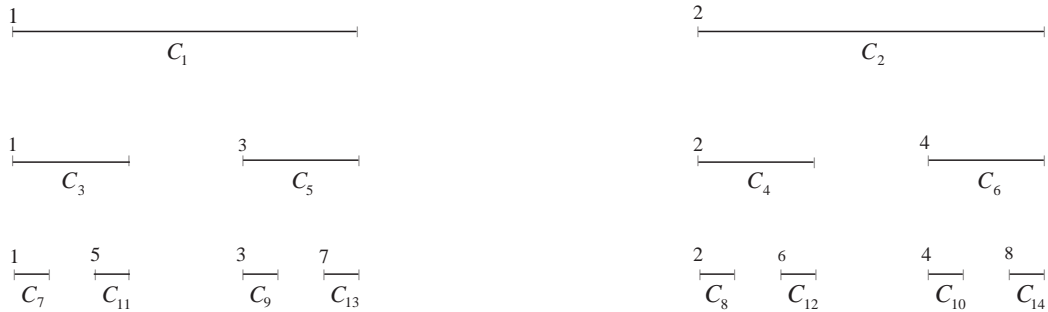


Figura 3.1: Costruzione di una successione u.d. sull'insieme di Cantor

**Proposizione 3.2.1.** *La successione  $(x_n)$  è uniformemente distribuita rispetto alla misura di Hausdorff  $\mathcal{H}^s$ .*

*Dimostrazione.*

Indichiamo con  $\mathcal{F}$  la classe di tutte le funzioni caratteristiche  $\chi_{C_n}$  degli intervalli  $C_n$  al variare di  $n \in \mathbb{N}$  e con  $\mathcal{C}(C)$  l'insieme di tutte le funzioni continue e a valori reali sull'insieme di Cantor.

Mostriamo innanzitutto che la famiglia  $\mathcal{F}|_C$  è determinante rispetto alla misura di Hausdorff  $\mathcal{H}^s$ . Con il simbolo  $\mathcal{F}|_C$  denotiamo le restrizioni delle  $g \in \mathcal{F}$  a  $C$ . Sia  $\text{span}(\mathcal{F}|_C)$  l'insieme di tutte le combinazioni lineari finite di elementi di  $\mathcal{F}|_C$  con coefficienti reali. Verifichiamo che  $\text{span}(\mathcal{F}|_C)$  è denso uniformemente in  $\mathcal{C}(C)$ . Consideriamo  $f \in \mathcal{C}(C)$ , allora  $f$  è uniformemente continua su  $C$ , essendo questo un compatto. Perciò fissato  $\varepsilon > 0$ , esiste  $\delta > 0$  tale che se  $|x' - x''| < \delta$  allora  $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$  per  $x', x'' \in C$ . Preso  $\varepsilon = \frac{1}{m}$ , indichiamo con  $\delta_m$  il corrispondente valore di  $\delta$  e chiamiamo  $R$  la collezione dei primi  $2^r$  intervalli tra i  $C_n$  con diametro inferiore a  $\delta_m$ . Per ogni  $y \in \bigcup_{C_n \in R} C_n$  definiamo la funzione  $g_m \in \mathcal{F}$  come:

$$g_m(y) = \sum_{n \in (2^r)} f(x_n) \chi_{C_n}(y)$$

dove con  $n \in (2^r)$  indichiamo che gli  $n$  considerati sono solo quelli riferiti ai  $C_n \in R$ . Allora risulta che  $|g_m(y) - f(y)| < \frac{1}{m}, \forall y \in C$  e quindi che la successione delle  $g_m|_C$  converge uniformemente ad  $f$  su  $C$ . Inoltre  $g_m|_C \in \text{span}(\mathcal{F}|_C)$  e dunque  $f \in \overline{\text{span}(\mathcal{F}|_C)}$ . Essendo allora  $\text{span}(\mathcal{F}|_C)$  denso uniformemente in  $\mathcal{C}(C)$ , per il teorema 3.1.7 si ottiene che la famiglia  $\mathcal{F}|_C$  è determinante.

Consideriamo ora un qualsiasi  $C_n$  che sarà un intervallo del tipo  $[\frac{h-1}{3^n}, \frac{h}{3^n}]$  per qualche  $n \in \mathbb{N}$  e qualche  $h \in \mathbb{N}$  con  $1 \leq h \leq 3^n$ . Poichè la famiglia  $\mathcal{F}|_C$  è determinante, per ottenere la tesi basta mostrare che vale:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \chi_{C_n \cap C}(x_k) = \int_C d\mathcal{H}^s.$$

Ciò equivale a verificare che

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \chi_{C_n \cap C}(x_k) = \frac{1}{2^n}, \quad (3.4)$$

poichè si ha

$$\int_C d\mathcal{H}^s = \mathcal{H}^s(C \cap C_n) = \left(\frac{1}{3^n}\right)^s \mathcal{H}^s(C) = \frac{1}{3^{sn}} = \frac{1}{2^n}.$$

Osserviamo che, in generale, al passo  $t$ -esimo della costruzione dell'insieme di Cantor otteniamo  $2^t$  punti della successione  $(x_k)$  presa in esame, infatti:

$$\underbrace{0, \frac{2}{3}}_{I \text{ passo}}, \underbrace{0, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{8}{9}}_{II \text{ passo}}, \underbrace{0, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{8}{9}, \frac{2}{27}, \frac{20}{27}, \frac{8}{27}, \frac{26}{27}}_{III \text{ passo}}, \dots$$

Sia  $2^t \leq N < 2^{t+1}$ , allora:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \chi_{C_n}(x_k) &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{(2+2^2+\dots+2^{t-1})} \chi_{C_n \cap C}(x_k) + \frac{1}{N} \sum_{k=2^t-1}^N \chi_{C_n \cap C}(x_k) \\ &= \frac{2^t - 2}{N} \cdot \frac{1}{2^t - 2} \sum_{k=1}^{2^t-2} \chi_{C_n \cap C}(x_k) \\ &+ \frac{N - 2^t + 2}{N} \cdot \frac{1}{N - 2^t + 2} \sum_{k=2^t-1}^N \chi_{C_n \cap C}(x_k). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Per costruzione le prime ripartizioni potrebbero non avere il numero "giusto" di punti in  $C_n \cap C$ . Invece per ogni ripartizione costruita al passo  $m$ -simo con  $m \geq n$  si ha, appunto per l'ordinamento "mille foglie", che ogni  $2^n$  punti esattamente uno degli  $x_k$  cade in  $C_n \cap C$ . Allora per  $t \rightarrow \infty$  risulta:

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{2^t-2} \chi_{C_n \cap C}(x_k) \rightarrow \frac{1}{2^n}. \quad (3.6)$$

Per  $N \geq k > 2^t - 2$  possiamo scrivere  $N = (2^t - 2) + M2^n + d$  con  $0 \leq d < 2^n$  e risulta:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N - 2^t + 2} \sum_{k=2^t-1}^N \chi_{C_n \cap C}(x_k) &= \frac{M2^n}{N - 2^t + 2} \cdot \frac{1}{M2^n} \sum_{k=2^t-1}^{N-d} \chi_{C_n \cap C}(x_k) \\ &+ \frac{d}{N - 2^t + 2} \cdot \frac{1}{d} \sum_{k=N-d+1}^N \chi_{C_n \cap C}(x_k) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Per quanto osservato prima abbiamo:

$$\frac{1}{M2^n} \sum_{k=2^t-1}^{N-d} \chi_{C_n \cap C}(x_k) = \frac{1}{2^n}.$$

Mentre per  $N \rightarrow \infty$  otteniamo:

$$\frac{d}{N - 2^t + 2} \cdot \frac{1}{d} \sum_{k=N-d+1}^N \chi_{C_n \cap C}(x_k) \rightarrow 0$$

essendo  $0 \leq \frac{d}{N} < \frac{2^n}{2^t} \rightarrow 0$  per  $t \rightarrow \infty$ .

Utilizzando le ultime relazioni nella 3.7 risulta perciò:

$$\frac{1}{N - 2^t + 2} \sum_{k=2^t-1}^N \chi_{C_n \cap C}(x_k) \rightarrow \frac{1}{2^n} \quad (3.8)$$

In definitiva abbiamo ricavato che la 3.5 è una combinazione convessa di due termini che, per la 3.6 e la 3.8, tendono a  $\frac{1}{2^n}$ . Perciò quando nella 3.5 passiamo al limite per  $N \rightarrow \infty$ , e dunque per  $t \rightarrow \infty$ , si ottiene la tesi.

□

### 3.2.2 Algoritmo per generare successioni uniformemente distribuite sui frattali

Il risultato ottenuto nel precedente paragrafo, sfruttando la tecnica dell'ordinamento "millefoglie" ci suggerisce un vero e proprio algoritmo per creare successioni di punti uniformemente distribuite. Il metodo che proponiamo in questo paragrafo, infatti, lo abbiamo implicitamente applicato per ottenere una successione u.d. sull'insieme di Cantor e lo utilizzeremo per produrre successioni di punti uniformemente distribuite su altri insiemi frattali generati tramite la tecnica IFS. Il seguente algoritmo si basa proprio sulla famiglia di trasformazioni che individuano il frattale e, per fissare le

idee, nel presentarlo faremo riferimento proprio all'insieme di Cantor.

Siano  $S_1$  e  $S_2$  le similitudini che definiscono l'insieme  $C$  di Cantor, cioè:

$$\begin{cases} S_1(x) = \frac{1}{3}x \\ S_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \end{cases}$$

Indichiamo con  $(x_n)$  la successione di punti data dal seguente procedimento. Fissato  $x_0 = 0$ , applichiamo a  $x_0$  successivamente  $S_1$  e  $S_2$  ottenendo i primi due punti. Al secondo passo a ciascuno dei punti precedenti applichiamo prima  $S_1$  e poi  $S_2$ , generando quattro punti. I successivi otto punti li ricaviamo analogamente applicando ad ogni punto ottenuto al passo precedente entrambe le trasformazioni consecutivamente.

In pratica il metodo agisce in questo modo:

**primo passo**

$$x_1 = S_1(0) = 0 \quad x_2 = S_2(0) = \frac{2}{3}$$

**secondo passo**

$$x_3 = S_1(x_1) = 0 \quad x_4 = S_2(x_1) = \frac{2}{3}$$

$$x_5 = S_1(x_2) = \frac{2}{9} \quad x_6 = S_2(x_2) = \frac{8}{9}$$

**terzo passo**

$$x_7 = S_1(x_3) = 0 \quad x_8 = S_2(x_3) = \frac{2}{9} \quad x_9 = S_1(x_4) = \frac{2}{9}$$

$$x_{10} = S_2(x_4) = \frac{8}{9} \quad x_{11} = S_1(x_5) = \frac{2}{27} \quad x_{12} = S_2(x_5) = \frac{20}{27}$$

$$x_{13} = S_1(x_6) = \frac{8}{27} \quad x_{14} = S_2(x_6) = \frac{26}{27}$$

e così via.

**Osservazione 3.2.2.** *Osserviamo che se invece di  $S_1$  e  $S_2$  usiamo le due trasformazioni che ammettono  $[0, 1]$  come attrattore, otteniamo esattamente la successione "mille foglie" che, come abbiamo mostrato nel paragrafo 1.2.2, è uniformemente distribuita su  $[0, 1]$ .*

Descriviamo ora l'algoritmo per un frattale generico  $F$  definito dalle similitudini  $S_1, \dots, S_m$  e avente  $F_0$  come insieme iniziatore.

Fissato un punto  $x_0 \in F_0$ , al primo passo della procedura, applichiamo le  $m$  trasformazioni successivamente a  $x_0$  ottenendo i punti:

$$x_1 = S_1(x_0), \dots, x_m = S_m(x_0).$$

Al secondo passo, applichiamo a  $x_1$ , in sequenza,  $S_1, \dots, S_m$  poi lo rifacciamo per  $x_2$  e così via, fino a  $x_m$ . Si ottengono così  $m^2$  punti, ordinati nella maniera naturale. Analogamente si procede al terzo passo (e poi nei successivi): al primo degli  $m^2$  punti si applicano in sequenza  $S_1, \dots, S_m$ , poi si ripete la procedura sul secondo e così via, fino ad arrivare al punto  $m^2$ -esimo.

Procedendo in questa maniera costruiamo una successione  $(x_n)$  di punti appartenenti al frattale  $F$  e opportunamente ordinati. Nei prossimi due paragrafi presenteremo altri due esempi che mostrano come successioni create con questo algoritmo siano uniformemente distribuite.

### 3.2.3 Successioni uniformemente distribuite sul Triangolo di Sierpiński

Consideriamo il triangolo  $T_0 \subset \mathbb{R}^2$  di vertici  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$  e  $(1, 1)$  e le similitudini  $S_1$ ,  $S_2$  e  $S_3$ , definite in 2.29, che generano il triangolo di Sierpiński  $S$  a partire dall'iniziatore  $T_0$ .

**Notazione 3.2.3.** *Indichiamo con:*

- $\mathcal{T}$  l'insieme di tutti i triangoli che si ottengono nella generazione di  $S$ .
- $A_n$  l'unione dei  $3^n$  triangoli chiusi ottenuti al passo  $n$ -simo della costruzione di  $S$ . In pratica si ha:

$$A_0 = T_0, \quad A_1 = \bigcup_{i=1}^3 S_i(A_0), \quad A_2 = \bigcup_{i=1}^3 S_i(A_1), \dots, \quad A_n = \bigcup_{i=1}^3 S_i(A_{n-1}) \dots$$

da cui  $S = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ .

- $\mathcal{A}_n$  l'insieme dei  $3^n$  triangoli la cui unione è  $A_n$ .

Per ciascun triangolo  $T \in \mathcal{A}_n$  sia  $x_T$  il vertice in basso a sinistra.

Mostriamo che questi punti  $x_T$  di  $S$  opportunamente riordinati costituiscono una successione  $(x_n)$  uniformemente distribuita. Costruiamo tale successione utilizzando l'algoritmo introdotto nel paragrafo precedente.

Fissato  $x_0 = (0, 0)$  si ha:

**primo passo**

$$x_1 = (0, 0) \quad x_2 = \left(0, \frac{1}{2}\right) \quad x_3 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

**secondo passo**

$$x_4 = (0, 0) \quad x_5 = \left(0, \frac{1}{2}\right) \quad x_6 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$x_7 = \left(0, \frac{1}{4}\right) \quad x_8 = \left(0, \frac{3}{4}\right) \quad x_9 = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$$

$$x_{10} = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) \quad x_{11} = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) \quad x_{12} = \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right)$$

e così via.

Mostriamo nelle figure seguenti, i punti ottenuti dai primi tre passi dell'algoritmo:

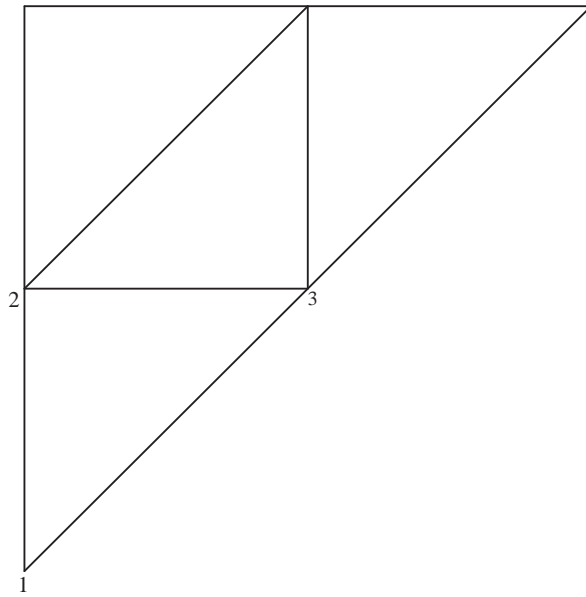


Figura 3.2: I passo della costruzione di una successione u.d. su S

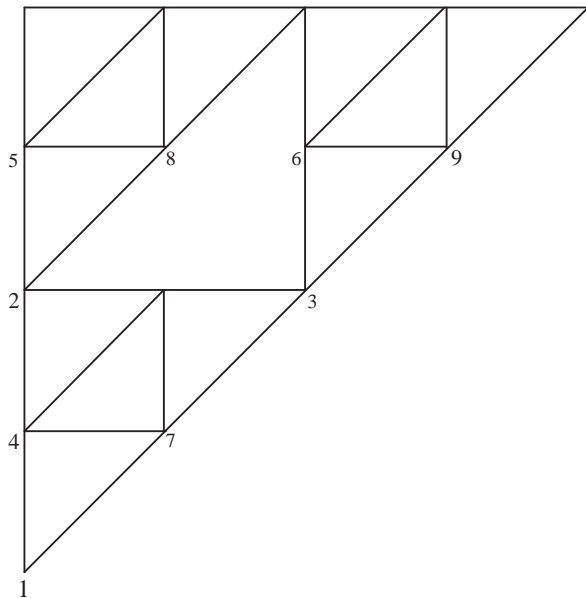


Figura 3.3: II passo della costruzione di una successione u.d. su S



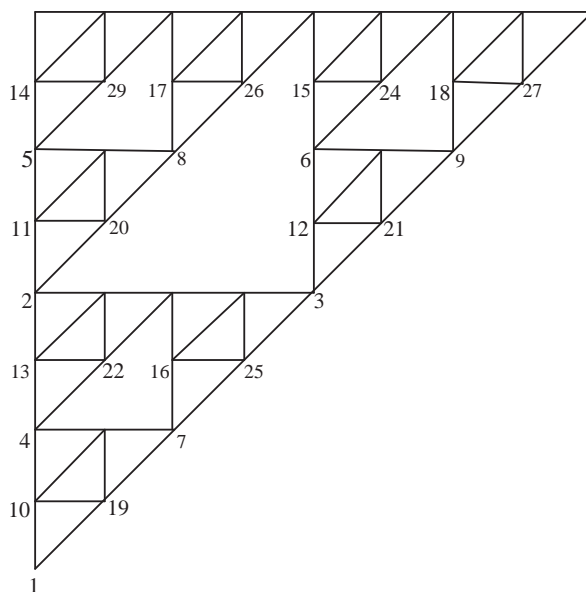


Figura 3.4: III passo della costruzione di una successione u.d. su  $S$

Sia  $P$  la misura di Hausdorff normalizzata, cioè  $P$  è la misura di probabilità che associa il valore 1 al triangolo di Sierpiński  $S$ :

$$P = 2\mathcal{H}^s \quad \text{con } s = \frac{\log 3}{\log 2} \quad (3.9)$$

Vogliamo dimostrare la seguente proposizione.

**Proposizione 3.2.4.** *La successione  $(x_n)$  di punti del triangolo di Sierpiński  $S$  è uniformemente distribuita rispetto alla misura di Hausdorff normalizzata  $P$ , definita in 3.9.*

**Osservazione 3.2.5.** *Procederemo nella dimostrazione analogamente a come abbiamo mostrato la 3.2.1, giacchè l'algoritmo di generazione della successione considerata è il medesimo per l'insieme di Cantor e il triangolo di Sierpiński.*

*Dimostrazione.*

Sia  $\mathcal{M}$  la famiglia delle funzioni caratteristiche degli insiemi del tipo  $S \cap T$ , dove  $T$  è un generico triangolo di  $\mathcal{T}$ . Indichiamo con  $\mathcal{C}(S)$  l'insieme di tutte le funzioni  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  continue. Mostriamo che  $\mathcal{M}$  è una famiglia determinante, usando il teorema 3.1.7. A tale scopo basta far vedere che  $\text{span}(\mathcal{M})$  è denso uniformemente in  $\mathcal{C}(S)$ .

Sia  $f \in \mathcal{C}(S)$ , allora  $f$  è uniformemente continua su  $S$  essendo questo un compatto di  $\mathbb{R}^2$ . Fissato  $\varepsilon > 0$ , esiste perciò  $\delta > 0$  tale che se  $\|x' - x''\| \leq \delta$  allora  $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$  per ogni  $x', x'' \in S$ . Sia  $n \in \mathbb{N}$  tale che ogni triangolo  $T \in \mathcal{A}_n$  ha diametro minore di  $\delta$ . Definiamo la funzione:

$$g_n(y) = \sum_{t \in \mathcal{A}_n} f(x_T) \chi_{S \cap T}(y)$$

Osserviamo che  $g_n \in \text{span}(\mathcal{M})$  e che  $|g_n(y) - f(y)| < \varepsilon$ . Infatti per ogni  $y \in S$  esiste  $T \in \mathcal{A}_n$  tale che  $y \in S \cap T$  e poichè  $|T| < \delta$  si ha che  $\|y - x_n\| \leq |T| < \delta$ . Allora per l'uniforme continuità  $|g_n(y) - f(y)| = |f(x_n) - f(y)| < \varepsilon$ .

Dunque abbiamo ottenuto che la successione  $(g_n)$  converge uniformemente ad  $f$  su  $S$  e perciò  $\text{span}(\mathcal{M})$  è denso uniformemente in  $\mathcal{C}(S)$ .

Fissato un qualsiasi  $T \in \mathcal{T}$  generato al passo  $n$ -simo, poichè la famiglia  $\mathcal{M}$  è determinante, resta da mostrare che

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \chi_{S \cap T}(x_k) = \int_{S \cap T} \chi_{S \cap T} dP$$

che equivale a verificare che

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \chi_{S \cap T}(x_k) = \frac{1}{3^n} \quad (3.10)$$

essendo

$$\int_{S \cap T} \chi_{S \cap T} dP = P(S \cap T) = 2\mathcal{H}^s(S \cap T) = 2 \cdot \frac{1}{2^{sn}} \mathcal{H}^s(S) = 2 \cdot \frac{1}{2^{sn}} \frac{1}{2} = \frac{1}{2^{sn}} = \frac{1}{3^n}$$

Sia  $3^t \leq N < 3^{t+1}$ , allora si ha:

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \chi_{S \cap T}(x_k) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{3+3^2+\dots+3^{t-1}} \chi_{S \cap T}(x_k) + \frac{1}{N} \sum_{k=\frac{3^t-1}{2}}^N \chi_{S \cap T}(x_k) \quad (3.11)$$

essendo  $3 + 3^2 + \dots + 3^{t-1} = \frac{3^t-3}{2}$ .

Per  $k > \frac{3^t-3}{2}$  si osserva che, per l'ordine nel quale sono stati costruiti i punti  $x_k$ , ogni  $3^n$  punti esattamente un punto della successione considerata appartiene al triangolo  $T$  fissato.

Allora scrivendo  $N$  come  $N = \left(\frac{3^t-2}{2}\right) + M3^n + d$  con  $0 \leq d < 3^n$ , risulta:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \chi_{S \cap T}(x_k) &= \frac{\frac{3^t-3}{2}}{N} \cdot \frac{1}{\frac{3^t-3}{2}} \sum_{k=1}^{\frac{3^t-3}{2}} \chi_{S \cap T}(x_k) \\ &+ \frac{M3^n}{N} \cdot \frac{1}{M3^n} \sum_{k=\frac{3^t-1}{2}}^{N-d} \chi_{S \cap T}(x_k) \\ &+ \frac{d}{N} \cdot \frac{1}{d} \sum_{k=N-d+1}^N \chi_{S \cap T}(x_k) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Passando al limite per  $N \rightarrow \infty$  e quindi per  $t \rightarrow \infty$  la 3.12, si ha la tesi 3.10. □

### 3.2.4 Successioni uniformemente distribuite sulla Curva di Von Koch

Consideriamo la curva di Von Koch  $K$  definita tramite le trasformazioni 2.30. L'algoritmo che abbiamo introdotto nel paragrafo 3.2.2 può essere utilizzato nuovamente per ottenere una successione di punti, stavolta appartenenti all'insieme  $K$ , uniformemente distribuita rispetto alla misura di Hausdorff  $s$ -dimensionale con  $s = \frac{\log 4}{\log 3}$ .

Se prendiamo l'intervallo unitario  $[0, 1]$  come insieme iniziatore e fissiamo il punto  $O = (0, 0)$  come punto di partenza del nostro algoritmo, otteniamo:

**primo passo**

$$x_1 = (0, 0) \quad x_2 = \left(\frac{1}{3}, 0\right) \quad x_3 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}\right) \quad x_4 = \left(\frac{2}{3}, 0\right)$$

**secondo passo**

$$x_5 = (0, 0) \quad x_6 = \left(\frac{1}{3}, 0\right) \quad x_7 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}\right) \quad x_8 = \left(\frac{2}{3}, 0\right)$$

$$x_9 = \left(\frac{1}{9}, 0\right) \quad x_{10} = \left(\frac{7}{18}, \frac{\sqrt{3}}{18}\right) \quad x_{11} = \left(\frac{10}{18}, \frac{\sqrt{3}}{9}\right) \quad x_{12} = \left(\frac{7}{9}, 0\right)$$

$$x_{13} = \left(\frac{1}{6}, \frac{\sqrt{3}}{18}\right) \quad x_{14} = \left(\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}}{9}\right) \quad x_{15} = \left(\frac{2}{3}, \frac{\sqrt{3}}{9}\right) \quad x_{16} = \left(\frac{5}{6}, \frac{\sqrt{3}}{18}\right)$$

$$x_{17} = \left(\frac{2}{9}, 0\right) \quad x_{18} = \left(\frac{4}{9}, \frac{\sqrt{3}}{9}\right) \quad x_{19} = \left(\frac{11}{18}, \frac{\sqrt{3}}{18}\right) \quad x_{20} = \left(\frac{8}{9}, 0\right)$$

e così via.

In figura 3.5 mostriamo i primi due passi della costruzione di questa successione, evidenziando l'ordine secondo il quale i punti vengono disposti.

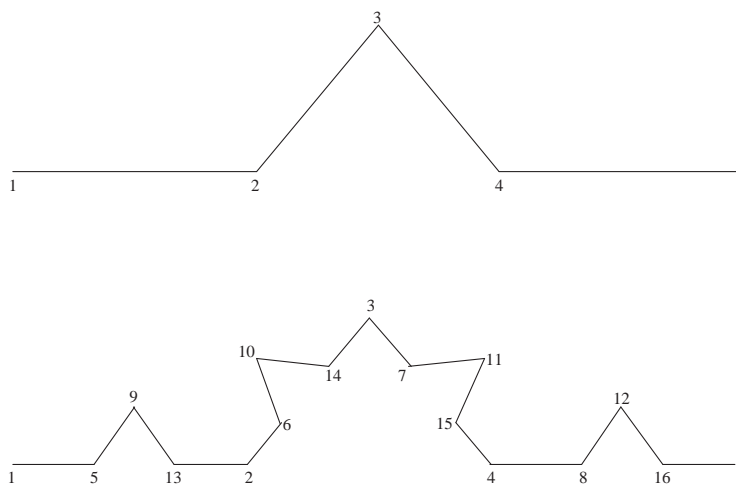


Figura 3.5: Costruzione di una successione u.d. sulla curva di Von Koch

Sia ora  $P$  la misura di Hausdorff normalizzata, cioè  $P$  è la misura di probabilità che associa il valore 1 alla curva di Von Koch  $K$ . Procedendo analogamente a come abbiamo fatto per il triangolo di Sierpiński in 3.2.4 e per l'insieme di Cantor in 3.2.1, possiamo dimostrare anche che la successione  $(x_k)$  appena costruita è uniformemente distribuita su  $K$  rispetto a  $P$ .

In questo paragrafo vogliamo presentare, però, un altro metodo per determinare successioni uniformemente distribuite sulla curva di Von Koch, che sfrutta le successioni uniformemente distribuite costruite su  $[0, 1]$  nel capitolo 1. Innanzitutto definiamo una particolare distanza tra due punti sulla curva  $K$ :

$$d(x, y) = P([x, y]) \quad \forall x, y \in K$$

dove con  $[x, y]$  indichiamo l'arco di curva compreso tra i due punti  $x$  e  $y$  di  $K$ . Consideriamo l'applicazione  $h : K \rightarrow [0, 1]$  tale che:

$$h(x) = d(0, x) \quad \forall x \in K$$

Osserviamo che  $h$  è continua e biunivoca e quindi con inversa continua, cioè è un omeomorfismo tra  $K$  e  $[0, 1]$ . Nella sezione 1.2 abbiamo già determinato diverse successioni uniformemente distribuite su  $[0, 1]$ , pertanto l'idea è quella di mostrare che l'omeomorfismo  $h$  conserva, in un certo senso, l'uniforme distribuzione, cioè:

**Proposizione 3.2.6.** *Se  $(x_n)$  è una successione di punti di  $[0, 1]$  uniformemente distribuita, allora la successione delle controimmagini tramite l'omeomorfismo  $(h^{-1}(x_n))$  è uniformemente distribuita rispetto alla misura di Hausdorff normalizzata  $P$  sulla curva  $K$ .*

*Dimostrazione.*

Essendo la famiglia  $\mathcal{C}([0, 1])$  delle funzioni continue su  $[0, 1]$  determinante (si

veda 1.1.6) e  $(x_n)$  uniformemente distribuita su  $[0, 1]$  per ipotesi, risulta che:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N g(x_k) = \int_0^1 g(t) dt, \quad \forall g \in \mathcal{C}([0, 1]) \quad (3.13)$$

Prendiamo in considerazione la successione delle controimmagini tramite  $h$  dei punti  $x_k$  della successione di partenza, allora dalla 3.13 segue che:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(h^{-1}(x_k)) = \int_0^1 f(h^{-1}(t)) dt, \quad \forall f \in \mathcal{C}(K) \quad (3.14)$$

essendo  $f \circ h^{-1}$  continua e a valori reali su  $[0, 1]$ .

Vogliamo dimostrare che:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(h^{-1}(x_k)) = \int_K f(h^{-1}) dP, \quad \forall f \in \mathcal{C}(K) \quad (3.15)$$

Per arrivare a ciò è necessario verificare che per ogni  $f$  continua sulla curva di Von Koch vale:

$$\int_a^b f(h^{-1}(t)) dt = \int_{h^{-1}(a)}^{h^{-1}(b)} f dP, \quad \forall a, b \in K \quad (3.16)$$

Ogni  $f$  continua su  $K$  può essere approssimata uniformemente da combinazioni lineari di funzioni caratteristiche di pezzi omotetici alla curva  $K$ . Indichiamo con  $\mathcal{H}$  la famiglia di tutti questi pezzi di curva omotetici all'intera  $K$ .

Per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che se  $H \in \mathcal{H}$  con diametro  $|H| < \delta$ , allora  $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$  per ogni  $x', x'' \in H$ . Scelto  $n \in \mathbb{N}$ , indichiamo con  $\mathcal{H}_n \subset \mathcal{H}$  l'insieme dei  $4^n$  pezzi omotetici, generati al passo  $n$ -simo, di diametro pari a  $3^{-n} < \delta$ . Poniamo per ogni  $x \in \mathcal{H}_n$  e per ogni  $n \in \mathbb{N}$ :

$$g'(x) = \min f(x): x \in \mathcal{H}_n = m_n$$

$$g''(x) = \max f(x): x \in \mathcal{H}_n = M_n$$

Dunque per ogni  $x \in K$  abbiamo che:

$$g'(x) \leq f(x) \leq g''(x) \quad (3.17)$$

$$M_n - m_n < \varepsilon \quad (3.18)$$

Essendo perciò:

$$\begin{aligned} \int_K \chi_{\mathcal{H}_n} dP &= P(\mathcal{H}_n) = \frac{1}{4^n} \\ \int_K g' dP &= \sum_{i=1}^{4^n} m_i \chi_{\mathcal{H}_i} dP = \sum_{i=1}^{4^n} \frac{m_i}{4^n} \\ \int_K g'' dP &= \sum_{i=1}^{4^n} M_i \chi_{\mathcal{H}_i} dP = \sum_{i=1}^{4^n} \frac{M_i}{4^n} \end{aligned}$$

usando anche 3.17 e 3.18 otteniamo:

$$\begin{aligned} \int_K g' dP &\leq \int_K f dP \leq \int_K g'' dP \\ \int_K (g'' - g') dP &= \sum_{i=1}^{4^n} (M_i - m_i) \frac{1}{4^n} < \varepsilon \end{aligned}$$

Allora per ogni  $n \in \mathbb{N}$  si ha:

$$\int_0^1 \chi_{\mathcal{H}_n} h^{-1}(t) dt = \frac{1}{4^n} = \int_K \chi_{\mathcal{H}_n} dP$$

e quindi la 3.16.

Usando questo risultato, dalla 3.14 segue la tesi 3.15.

□

I risultati raggiunti in questo capitolo ci permettono di supporre che l'algoritmo introdotto nel paragrafo 3.2.2 possa generare successioni uniformemente distribuite rispetto alla misura di Hausdorff normalizzata su una classe più ampia di frattali.

# Bibliografia

- [1] R.L. Adler and L. Flatto. *Uniform distribution of Kakutani's interval splitting procedure*. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verw. Gebiete, **38**: 253–259, 1977.
- [2] P. Bohl. *Über ein in der Theorie der säkularen Störungen vorkommendes Problem*. J. reine angew. Math., **135**: 189–283, 1909.
- [3] G. Cantor. *De la puissance des ensembles parfait de points*. Acta Mathematica, **2**, 1884.
- [4] K. J. Falconer. *The Geometry of fractal Sets*. Cambridge University Press, 1985.
- [5] K. J. Falconer. *Fractal Geometry-Mathematical Foundations and Applications*. John Wiley & Sons, 1990.
- [6] P.R. Halmos. *Measure theory*. Van Nostrand, 1950.
- [7] J. H. Halton. *On the efficiency of certain quasi-random sequences of points in evaluating multidimensional integrals*. Numer. Math., **2**: 84–90, 1960.
- [8] E. Hewitt and L. J. Savage. *Symmetric measures on cartesian products*. T.A.M.S., **80**: 470–501, 1955.



- [9] S. Kakutani. *A problem of equidistribution on the unit interval  $[0,1]$* . In *Proceedings of Oberwolfach Conference on Measure Theory (1975)*. Lecture Notes in Math. **541**, Springer, 1976.
- [10] S. Knapowski. *Über ein Problem der Gleichverteilungstheorie*. Colloq. Math., **5**: 8–10, 1957.
- [11] H. Von Koch. *Sur une courbe continue sans tangente, obtenue par une construction géométrique élémentaire*. Archiv för Matemat., Astron. och Fys., **1**:681–702, 1904.
- [12] L. Kuipers and H. Niederseiter. *Uniform distribution of sequences*. John Wiley & Sons, 1974.
- [13] B. B. Mandelbrot. *Les objets fractals: forme, hasard et dimension*. Flammarion, 1975.
- [14] B. B. Mandelbrot. *The Fractal Geometry of Nature*. W. H. Freeman and Co., 1982.
- [15] M.E. Munroe. *Introduction to Measure and Integration*. Addison-Wisley, 1953.
- [16] E. Pap, editor. *Handbook of measure theory*. Elsevier, 2002.
- [17] C. A. Rogers. *Hausdorff Measures*. Cambridge University Press, 1970.
- [18] W. Sierpiński. *Sur la valeur asymptotique d'une certaine somme*. Bull Intl. Acad. Polon. Sci.(Cracovie), **A**: 9–11, 1910.
- [19] W. Sierpiński. *Sur une courbe dont tout point est un point de ramification*. C. R. Acad. Sci. Paris, **160**: 302–305, 1915.

- [20] J. G. van der Corput. *Verteilungsfunktionen*. Proc. Ned. Akad. v. Wet., **38**: 813–821, 1935.
- [21] A. Volčič. *Uniformly distributed sequences of points and of partitions*. Preprint, 2003.
- [22] J. von Neumann. *Gleichmässig dichte Zahlenfolgen*. Math. Fiz. Lapok, **32**: 32–40, 1925.
- [23] H. Weyl. *Über die Gibbsche Erscheinung und verwandte Konvergenzphänomene*. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, **330**: 377–407, 1910.
- [24] H. Weyl. *Über die Gleichverteilung von Zählen mod. Eins*. Math. Ann., **77**: 313–352, 1916.

# Rigraziamenti

*Ancora presa dagli ultimi ritocchi a questo lavoro, non mi sembra vero di essere giunta al termine di questo percorso. Ripercorrendo la strada non posso fare a meno di ricordare tutti coloro che mi sono stati vicini.*

*Il mio primo pensiero, ovviamente, va ai miei genitori, senza i quali non sarei mai potuta arrivare a questo punto, nè diventare quella che sono. I discorsi discreti e incoraggianti di papà, le parole forti e rassicuranti di mamma hanno accompagnato questi anni di studio, permettendomi di crescere. Potrei descrivere tanti momenti in cui hanno saputo sostenermi come nessun altro, ma non è necessario, perché li porto tutti nel mio cuore insieme ad una enorme grazie. Grazie a Claudietta, che mi ha sopportato e continua a sopportarmi con pazienza. La sua frizzante allegria e la sua irresistibile dolcezza, più di una volta, mi hanno risollevato dallo sconforto. E grazie a mio fratello Emanuele, che con le sue battute divertenti, con la sua saggezza e anche con i suoi silenzi ha saputo sempre sostenermi.*

*Desidero ringraziare il prof. Volcic per avermi aiutato nell'affrontare ogni difficoltà di questa tesi con la massima tranquillità, per la disponibilità e la gentilezza sempre dimostratami, ma soprattutto per aver creduto, forse più di me, nelle mie capacità. Grazie per avermi seguito con costanza e pazienza, alimentando la mia passione per questi studi.*

*Un ringraziamento va anche a tutti i miei docenti di questi cinque anni, che*

*in un modo o nell'altro, mi hanno donato qualcosa di prezioso che resterà per sempre con me.*

*Grazie alla prof. Armentano, che per me è stata molto più che un'insegnante a cui sono rimasta profondamente legata dai tempi del liceo. Infatti se non avessi avuto modo di gustare il suo amore per la matematica forse oggi non sarei qui.*

*Un grandissimo grazie a nonno Domenico, a nonno Salvatore e a nonna Teresa, che anche se non ci sono più, sono stati i miei primi supporter e tifosi. Mi piace pensare a quanto sareste stati fieri di me se foste ancora qui. E un grazie di cuore a nonna Sonia che mi accompagna ogni giorno con il suo dolce sorriso. Ancora un grazie a tutti miei parenti piu' stretti che hanno sempre mostrato per quello che faccio una fiducia cieca e priva di incertezze, spronandomi sempre ad andare avanti per la mia strada.*

*Grazie a Ilaria, per i tuoi generosi consigli e la tua amicizia sincera, grazie per aver custodito le mie confidenze, grazie per non esserti mai stancata di ascoltarmi, grazie per esserti rallegata e aver pianto insieme a me.*

*Grazie a Luca, il suo immancabile ottimismo e la sua incrollabile speranza mi accompagnano da sempre regalandomi fiducia.*

*Grazie a Mariafrancesca, non ci sono parole per descrivere il legame di amiche-sorelle-cugine che ci unisce da sempre e che è per me punto di riferimento insostituibile.*

*Grazie ancora al Presidente (Marco) che ha sempre un pensiero per me e mi è sempre vicino così come la sua meravigliosa First Lady (Angela).*

*Grazie alla mia figlioccia Valbona, che sempre sa trovare la parola giusta per tirarmi su di morale e per riempirmi di allegria.*

*Grazie a Gianni, per la sua infinita disponibilità e il grande aiuto che mi ha dato nel campo informatico.*

*Grazie a Cenzyño, a Francesca, a Pitu (Piero), a Zaira, ad Alessia, ad Andrea, a Marianna, a Gianluca, a Luigi e a tutti i miei amici, vorrei continuare l'elenco ma le pagine non basterebbero a ricordare tutti coloro che ogni giorno mi regalano un pezzetto del loro cuore.*

*Grazie a Don Aldo, guida spirituale lungo un cammino ancora più lungo e faticoso di quello universitario. Grazie perchè nei tuoi occhi trovo sempre la luce del Signore e l'entusiasmo di servirlo.*

*Grazie a Don Pasquale, che da quando ero bambina ha vegliato su di me e anche ora dall'alto continua a farlo con amore.*

*Un ringraziamento particolare alla prima persona che ho conosciuto all'università e che da allora occupa un posto speciale nella mia vita, RosaMaria, amica eccezionale e compagna d'avventure insostituibile. Grazie per essere stata la mia confidente e aver sempre trovato in ogni momento il tempo per ascoltarmi e sostenermi.*

*Un'abbraccio speciale va a Raffaella per aver condiviso con me le sfide che la vita ci ha proposto in questi anni, per avermi permesso di crescere al suo fianco e per tutto l'affetto che mi ha sempre dimostrato.*

*Un'abbraccio altrettanto speciale va a Pasquale e a Fabio; le nostre risate attorno a un tavolo stracolmo di libri e appunti, hanno reso questi anni piacevoli e indimenticabili.*

*Grazie a Melissa, con cui non solo ho diviso esperienze di studio e di vita, ma anche la stessa casa. I ricordi che condividiamo, non abbandoneranno mai la mia mente e allieteranno sempre il mio cuore, perchè è raro avere la fortuna di trovare sul proprio cammino un'amica speciale come te.*

*E grazie a tutti gli altri amici "universitari" : Maria Teresa, Luisa, Caterina Ciccio e potrei proseguire con l'elenco, ma voi tutti sapete quanto tengo a ciascuno di voi e quanto siete importanti per me.*

*Grazie a tutti gli amici che ora sono lontani per motivi di studio o di altro genere: Antonio, che con le sue telefonate continua a farmi sorridere come ai tempi del liceo; Giovanni, che mi è costantemente vicino con la preghiera; Valentina che sa sempre donarmi un pizzico d'allegria; Debora con cui ho condiviso più di una battaglia; Fabiana che continua ad essere sempre presente nel mio cuore...*

*Un ringraziamento più che speciale a Davide, il mio fidanzato e compagno di tanti momenti, che con estrema pazienza ha sopportato i miei sbalzi di umore e le mie paranoie quando, sotto stress per un esame, non avevo altra valvola di sfogo che lui. Grazie perchè l'amore che mi regala ogni giorno è per me fonte di coraggio e di speranza.*

*Infine sento di ringraziare la persona più importante della mia vita, il Signore. Grazie per essere stato la stella che mi ha illuminato e il rifugio in cui trovare pace. Grazie per avermi perdonato quando ingiustamente me la prendevo con Te. Grazie perchè quello che ho vissuto in questi anni, le persone che finora ho ringraziato, le fatiche sopportate e i traguardi raggiunti, le gioie e i dolori, sono stati semplicemente un Tuo splendido dono per cui non finirò mai di dirti GRAZIE.*