**18. Script zur Vorlesung: Algebra (B III)**

**Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Gabriel Lehéricy, Simon Müller**

**WS 2016/2017: 13. Januar 2017**

In dieser Vorlesung wurde hauptsächlich die 17.Vorlesung kurz wiederholt und die Begriffe auf Deutsch nochmals zusammengefasst.

**Definition 1**

(1) Eine Gruppe $G \neq \{1\}$ ist *einfach*, wenn die einzigen Normalteiler nur $\{1\}$ und $G$ sind.

(2) $\{1\} = H_0 \leq \cdots \leq H_s = G$ ist eine *Normalreihe*, wenn $H_i \lhd H_{i+1}$.
**Notation:** $H \lhd G$ "$H$ Normalteiler in $G$" wird auch so bezeichnet: $G \lhd H$ "$H \leq G$ ist Normateiler"

(3) $H_{i+1}/H_i; i = 0, \ldots, s-1$ sind die *Faktorgruppen* oder die *Faktoren* oder die *Quotienten* der Normalreihe

(4) Die Normalreihe heißt *Kompositionsreihe*, falls alle Faktoren einfach sind.

(5) Zwei Reihen

$$H_0 \lhd \cdots, \lhd H_i \lhd H_{i+1} \lhd \cdots \lhd G$$

und $$K_0 \lhd \cdots, \lhd K_j \lhd K_{j+1} \lhd \cdots \lhd G$$

sind *äquivalent*, wenn es eine Bijektion $i \to j$ gibt, so dass die korrespondierenden Faktoren isomorph sind: $H_{i+1}/H_i \simeq K_{j+1}/K_j$.

(Ende der Wiederholung der 17. Vorlesung.)

**Definition 2**

$G$ heißt *auflösbar* (englisch: solvable), wenn es eine *Normalereihe mit abelschen Faktoren hat.*

**Erinnerung**

($i$) $S_n$ ist nicht abelsch für $n \geq 3$.

($ii$) $A_n$ ist nicht abelsch für $n \geq 4$.
Begründung: (123) und (234) kommutieren nicht.

**Beispiele**

$S_n$ ist auflösbar für $n \leq 4$

(a) $S_3 \rhd A_3 \rhd \{1\}$
$\mid S_3/A_3 \mid = 2 \qquad \mid A_3/\{1\} \mid = 3$: Diese zwei Gruppen haben als Ordnung eine Primzahl. Es folgt aus Lagrange, dass die Gruppen zyklisch sind, also abelsch.

(b) $S_4 \rhd A_4 \rhd V \rhd W \rhd \{1\}$, wobei $V = \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ die *kleinsche Vierergruppe* ist und $W := \{1, (12)(34)\}$.
$\mid S_4/A_4 \mid = 2 \qquad \mid A_4/V \mid = 3 \qquad \mid V/W \mid = 2.$