Oliver Schnürer, Matthias Makowski — Universität Konstanz — Wintersemester 2013/2014

Übungen zur Vorlesung Differentialgeometrie I

Blatt 9

Aufgabe 9.1. (4 Punkte)

(i) Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Definiere die Abbildung
$$\Delta : M \to M \times M, \quad x \mapsto (x, x).$$
Weise nach, dass $\Delta(M)$ eine Untermannigfaltigkeit von $M \times M$ ist.

(ii) Sei $M = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 + x_4^2 = 1\}$. Zeige, dass M eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^4$ ist.

Aufgabe 9.2. (4 Punkte)
Sei $f : B_1^m(0) \to \mathbb{R}^{m+k}$ eine differenzierbare C^∞-Einbettung, wobei $B_1^m(0)$ den offenen Einheitsball in $\mathbb{R}^m$ darstellt. Bezeichne weiterhin mit M die Untermannigfaltigkeit $f(B_1^m(0)) \subset \mathbb{R}^{m+k}$.

Zeige, dass es k glatte Abbildungen $N_i : B_1^m(0) \to \mathbb{R}^{m+k}$, $1 \le i \le k$, gibt, so dass für $p \in B_1^m(0)$ die Vektoren $N_i(p) \in (T_{f(p)}M)^\perp$ sind und
$$\langle N_i(p), N_j(p)\rangle = \delta_{ij},\ 1 \le i, j \le k,$$
erfüllen. Zeige, dass die Abbildung
$$F : B_1^m(0) \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{m+k}, \quad (x, y) \mapsto f(x) + y^i N_i(x)$$
ein Diffeomorphismus in einer Umgebung von $(0, 0)$ ist.

Aufgabe 9.3. (4 Punkte)

(i) Gib zwei nicht homöomorphe $\mathbb{R}$-Bündel über $\mathbb{S}^1$ an.

(ii) Zeige, dass jedes weitere $\mathbb{R}$-Bündel über $\mathbb{S}^1$ homöomorph zu einem dieser beiden Bündel ist.

Aufgabe 9.4. (4 Punkte)
Sei N eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. N heißt orientierbar, wenn es eine Familie von Karten von N gibt, deren Definitionsbereiche N überdecken, so dass die Determinante der Jacobi-Matrix der Kartenwechsel stets positiv ist.

Sei nun $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Wir sagen, dass M als Hyperfläche orientierbar ist, wenn es eine stetige Normale auf M gibt, d. h. es existiert eine stetige Abbildung $\nu : M \to \mathbb{R}^{n+1}$, so dass für $p \in M$ der Vektor $\nu(p) \in (T_pM)^\perp$ ist und $|\nu(p)| = 1$ erfüllt.

Zeige, dass M genau dann orientierbar ist, wenn es als Hyperfläche orientierbar ist.

Abgabe:
Bis Dienstag, 07.01.2014, 11:45 Uhr.