Lösungen zu Folie 130

Übung 1:
Die Funktion $f(x) = e^{0.1x-6} \cdot (x^2 - 12x + 36) + 5$ beschreibt den Wassergehalt eines Stausees innerhalb eines Tages (x in Stunden, $0 \le x \le 24$). Zu welchem Zeitpunkt hat der See am wenigsten Wasser? Wie viel Wasser enthält er zu diesem Zeitpunkt? Zu welchem Zeitpunkt hat der See den größten Abfluss?
Lösung:
Zu welchem Zeitpunkt hat der See am wenigsten Wasser? Wie viel Wasser enthält er zu diesem Zeitpunkt? Gefragt ist nach einem Tiefpunkt der Funktion f. Der Stausee hat nach 6 Stunden am wenigsten Wasser, nämlich ein Wassergehalt von 5 (der TP ist also $\big(6, \quad 5\big)$).
Zu welchem Zeitpunkt hat der See den größten Abfluss? Gefragt ist nach dem Minimum der Ableitung von f. Diese hat einen Tiefpunkt zum Zeitpunkt $10\sqrt{2} - 14$.
Es gilt

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \tfrac{1}{10} e^{0.1x-6}(x^2 + 8x - 84), \\
f''(x) &= \tfrac{1}{100} e^{0.1x-6}(x^2 + 28x - 4), \\
f'''(x) &= \tfrac{1}{1000} e^{0.1x-6}(x^2 + 48x - 276).
\end{aligned}
$$

Übung 2:
Eine Funktion f hat folgende allgemeine Funktionsgleichung: $f(x) = ax^2 + bx + c$. Wir wissen, dass $f(2) = 4$ gilt, und dass f bei $(1.5, 4.25)$ einen Hochpunkt besitzt. Bestimme aus diesen Informationen die genaue Funktionsgleichung von f.
Lösung:
Aus der Aufgabenstellung leiten sich die Bedingungen $f(2) = 4, f(1.5) = 4.25$ und $f'(1.5) = 0$ ab. Dies führt zum LGS

$$
\begin{array}{ccccc}
f(2) & = & 4a + 2b + c & = & 4 \\
f(1.5) & = & 2.25a + 1.5b + c & = & 4.25 \\
f'(1.5) & = & 3a + b & = & 0
\end{array} .
$$

Dieses LGS hat die Lösung $a = -1, b = 3, c = 2$. Die gesuchte Funktionsgleichung lautet also $f(x) = -x^2 + 3x + 2$.

Übung 3:
An welchen Punkten in $\mathbb{R}$ ist die Funktion $f(x) = |x|$ differenzierbar? Was ist die Ableitung in diesen Punkten?
Lösung:
Die Funktion f ist in allen Punkten außer $x = 0$ differenzierbar, denn dort existiert der Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

nicht (d.h. links- und rechtsseitiger Grenzwert stimmen nicht überein). Für $x > 0$ ist $f'(x) = 1$, für $x < 0$ ist $f'(x) = -1$.