Lösungen zu Folie 145

Übung 1:
Wie viel Geld muss man bei einem Zins von 3% p.a. anlegen, wenn man nach 10 Jahren 5000 Euro haben will?
Lösung:
Wir haben $K_{10} = 5000, i = 0.03$ und $t = 10$ gegeben. Gesucht ist nach K_0 (bei exponentieller Verzinsung, d.h. $K_t = K_0(1+i)^t$). Formel nach K_0 umstellen ergibt

$$K_0 = \frac{5000}{(1.03)^{10}} = 3720.47 \text{ Euro.}$$

Übung 2:
Berechne den Wert K_5 aus dem Beispiel von Seite 200, wenn das Geld am Ende eines Jahres (also am 31.12.) eingezahlt wird, und vergleiche das Ergebnis mit dem von Seite 200 und dem Beispiel von Seite 202. Ist das Ergebnis plausibel?
Lösung:
Wir verwenden die Formel für regelmäßige Einzahlungen am Ende des Jahres:

$$K_5 = 600 \cdot \sum_{k=0}^{4} (1.03)^k = 600 \cdot \left(\frac{1-(1.03)^5}{1-(1.03)} \right) = 3185.48 \text{ Euro.}$$

Werden die Einzahlungen erst am Ende eines Jahres getätigt, so ist das Endkapital geringer als bei monatlicher Einzahlung (3240.42 Euro). Die ist plausibel, da bei monatlicher Einzahlung bereits im zweiten Monat ein Zinseffekt auftritt wohingegen bei jährlich Einzahlung am Ende des Jahres erst nach zwei Jahren ein Zinseffekt auftritt.

Übung 3:
Eine Firma kann für 500 Euro eine Investition tätigen, die in Zukunft jedes Jahr 20 Euro einbringen würde (Beginn der Zuzahlungen in einem Jahr, die Zuzahlungen enden nie). Vergleiche den Kapitalwert der Investition bei einem Zinssatz $i_1 = 0.02$ mit dem Kapitalwert bei einem Zinssatz $i_2 = 0.05$. Berechne denjenigen Zinssatz i, sodass der Kapitalwert genau den Kosten der Investition entspricht.
Lösung:
Der Kapitalwert für den Zinssatz i_1 ist

$$KW = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{20}{1.02^k} = 20 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1.02^k} = 20 \cdot \left(\frac{\frac{1}{1.02}}{1-\frac{1}{1.02}} \right) = 1000 > 500.$$

Für $i = 0.05$ beträgt der Kapitalwert

$$KW = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{20}{1.05^k} = 20 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1.05^k} = 20 \cdot \left(\frac{\frac{1}{1.05}}{1-\frac{1}{1.05}} \right) = 400 < 500.$$

Damit ist die Investition beim Zinssatz von $i_1 = 0.02$ lohnenswert, bei einem Zinssatz von $i_2 = 0.05$ jedoch nicht

Nun soll

$$500 = KW = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{20}{(1+i)^k} = 20 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^k} = 20 \cdot \left(\frac{\frac{1}{(1+i)}}{1 - \frac{1}{(1+i)}} \right) = 20 \cdot \left(\frac{\frac{1}{(1+i)}}{\frac{i}{(1+i)}} \right) = 20 \cdot \frac{1}{i}$$

gelten. Also muss für den Zinssatz gelten, dass

$$i = \frac{20}{500} = \frac{1}{25} = 0.04.$$