

Wirtschaftsmathematik
Kurs W MS 18A
DHBW Ravensburg

Patrick Michalski (M.Sc. Mathematik)

Fachbereich Mathematik und Statistik

Universität Konstanz, Oktober - Dezember 2018

Termine

- Donnerstag, 25. Oktober 2018, 09:00 – 12:15 Uhr
- Dienstag, 30. Oktober 2018, 09:00 – 12:15 Uhr
- Mittwoch, 31. Oktober 2018, 13:15 – 16:30 Uhr
- Donnerstag, 08. November 2018, 13:15 – 16:30 Uhr
- Donnerstag, 22. November 2018, 13:15 – 16:30 Uhr
- Dienstag, 04. Dezember 2018, 13:15 – 18:15 Uhr
- Mittwoch, 05. Dezember 2018, 13:15 – 16:30 Uhr
- **Klausur, 13. Dezember 2018 (Dauer 60 Minuten), Uhrzeit noch nicht bekannt**

Bemerkungen

- Für Korrekturen des Skriptes und Anregungen aller Art, insbesondere auch für Verbesserungen von Rechtschreib- und Tippfehlern, bin ich sehr dankbar. Melden Sie sich einfach in der Vorlesung oder per E-Mail, wenn Ihnen zu Hause etwas einfällt unter

patrick.michalski@uni-konstanz.de

- **Übungen** Am Ende jedes Kapitels gibt es Übungsaufgaben zur freiwilligen (für die Klausurvorbereitung sehr nützlichen) und eigenständigen Bearbeitung. Zu Beginn der nächsten Vorlesung werden die Lösungen hierzu an die Tafel geschrieben und bei Bedarf werden 2–3 Aufgaben vorgerechnet (ca. 15 Min, aber nur, wenn die Aufgaben auch bearbeitet wurden). Am Ende der sieben Vorlesungen gibt es zur Klausurvorbereitung noch einmal Übungsaufgaben zu allen Kapiteln inklusive Lösungen. Es empfiehlt sich, Aufgaben gemeinsam mit Kommilitonen zu bearbeiten.

- **Klausur** Programmierbare und/oder grafikfähige Taschenrechner sind zur Klausur **nicht** zugelassen. Der Klausur wird ein Formelblatt, das vom Dozenten zusammengestellt wird, beigelegt. Das Formelblatt ist für die Studenten bereits vor der Klausur zum Lernen einsehbar.
- Es wird keine Wiederholungs- oder Fragestunde geben. Der siebte Vorlesungstermin wird bis zum Ende zum Zwecke der Stoffvermittlung genutzt.
- Sämtliche Informationen zur Vorlesung wie zum Beispiel Vorlesungstermine und Literaturhinweise finden Sie auf der **Homepage** zur Vorlesung unter:

<http://math.uni-konstanz.de/~michalski/WMS18A/index.html>

Inhaltsverzeichnis

- 1 Vektoren und Matrizen
- 2 Lineare Gleichungssysteme
- 3 Funktionen
- 4 Differentialrechnung für Funktionen in einer Variablen
- 5 Integralrechnung für Funktionen in einer Variablen
- 6 Differentialrechnung für Funktionen in mehreren Variablen
- 7 Finanzmathematik

1 Vektoren und Matrizen

1.1 Der Koordinatenraum \mathbb{R}^n

Es bezeichne \mathbb{N} die Menge der natürlichen Zahlen und \mathbb{R} die Menge der reellen Zahlen. Sei n eine natürliche Zahl ($n \in \mathbb{N}$), dann bezeichnet

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

die Menge aller n -Tupel (x_1, \dots, x_n) mit Komponenten aus \mathbb{R} . Die Menge \mathbb{R}^n wird als **Koordinatenraum** der Dimension n über \mathbb{R} bezeichnet, wobei der Name daher kommt, dass die einzelnen Komponenten eines Tupels als Koordinaten des Endpunktes eines Ortsvektors in einem kartesischen Koordinatensystem interpretiert werden können. Aus der Schule sind hauptsächlich der \mathbb{R}^2 (zweidimensionale Ebene) und der \mathbb{R}^3 (dreidimensionaler Raum) bekannt. Die Elemente des Koordinatenraums nennt man **Koordinatenvektoren**.

Für diese Tupel definiert man eine komponentenweise Addition durch

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n),$$

sowie eine komponentenweise Skalarmultiplikation mit einem Skalar aus \mathbb{R} durch

$$a \cdot (x_1, \dots, x_n) = (a \cdot x_1, \dots, a \cdot x_n).$$

Die Koordinatenvektoren notiert man häufig auch als **Spaltenvektoren**. Die Vektoraddition und Skalarmultiplikation entsprechen dann einer zeilenweisen Addition der Vektorkomponenten bzw. einer zeilenweisen Multiplikation mit einem Skalar:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \quad a \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot x_1 \\ \vdots \\ a \cdot x_n \end{pmatrix}.$$

Auf diese Weise entspricht die Vektoraddition im Falle des \mathbb{R}^2 oder des \mathbb{R}^3 anschaulich der Addition der zugehörigen Vektorpfeile und die Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl a der Streckung (oder Stauchung) des zugehörigen Vektorpfeils um den Faktor a . Insbesondere erhält man durch die Vektoraddition oder Skalarmultiplikation wieder einen Vektor in der Ebene bzw. im Raum.

Bemerkung

- Bei einem 2– oder 3–Tupel müssen sich die einzelnen Komponenten nicht unbedingt auf die Position in einem Koordinatensystem beziehen. Zum Beispiel kann ein Vektor $(a, t) \in \mathbb{R}^2$ den Wert a eines Aktienpaketes zum Zeitpunkt t beschreiben.
- Vor allem in den Natur- und Wirtschaftswissenschaften benötigt man oft n –Tupel mit $n \geq 2$ um bestimmte Zusammenhänge oder Größen zu beschreiben.

1.2 Skalarprodukt

Außer Addition und Skalarmultiplikation ist für Vektoren des \mathbb{R}^n noch eine weitere Operation definiert; das sogenannte **Skalarprodukt**. Für $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ und $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n$ ist das Skalarprodukt $v \cdot w$ wie folgt definiert:

$$v \cdot w = v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2 + \dots + v_n \cdot w_n.$$

Das Skalarprodukt $v \cdot w$ ist kein Vektor mehr, sondern eine Zahl (Skalar).

Beispiel

Für $v = (3, -2, 1) \in \mathbb{R}^3$ und $w = (1/3, 4, 2) \in \mathbb{R}^3$ ist

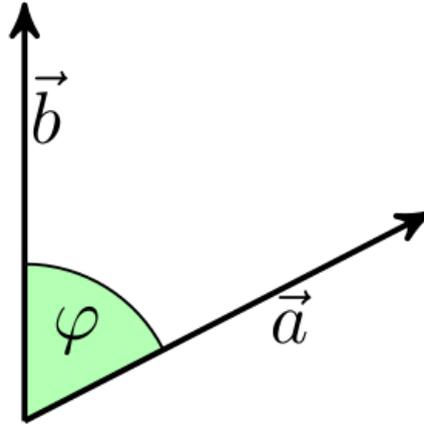
$$v \cdot w = 3 \cdot 1/3 + (-2) \cdot 4 + 1 \cdot 2 = 1 - 8 + 2 = -5.$$

Mithilfe des Skalarprodukts kann man die **Norm** $|v|$ eines Vektors $v \in \mathbb{R}^n$ definieren. Es gilt

$$|v| = \sqrt{v \cdot v} = \sqrt{v_1 \cdot v_1 + \cdots + v_n \cdot v_n}.$$

Die Norm entspricht im 2– oder 3–dimensionalen Raum genau der (anschaulichen) Länge des Vektors. Wir sprechen deshalb auch von der Länge oder dem Betrag eines Vektors.

Anschauliche Interpretation des Skalarprodukts im \mathbb{R}^2 bzw. im \mathbb{R}^3 :



$$a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot \cos \varphi$$

Man sieht, dass das Skalarprodukt zweier Vektoren genau dann 0 ist, wenn die beiden Vektoren senkrecht aufeinander stehen.

1.3 Matrizen

Eine **Matrix** mit m Zeilen und n Spalten und Einträgen aus \mathbb{R} ist ein rechteckiges Schema

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \text{wobei } a_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Beispiel

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$, wobei $a_{11} = 1$, $a_{12} = 9$, $a_{21} = 0$, \dots , $a_{32} = 3$.
- $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 5}$ mit bspw. $b_{24} = 2$.

Vektoren sind ein Spezialfall von Matrizen: Spaltenvektoren können als $(n \times 1)$ -Matrizen aufgefasst werden, Zeilenvektoren als $(1 \times n)$ -Matrizen.

Beispiel

- Der Spaltenvektor $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ kann als Matrix $v \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ aufgefasst werden.
- Der Zeilenvektor $w = (4, 3) \in \mathbb{R}^2$ kann als Matrix $w = (4 \ 3) \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$ aufgefasst werden.

Bemerkung

Bei der später eingeführten Matrizenmultiplikation macht es einen Unterschied, ob wir einen Vektor als Zeilen- oder Spaltenvektor schreiben.

Rechenregel

- Matrizen können addiert werden (**nur** bei gleicher Größe).
- Matrizen können mit Skalaren (reellen Zahlen) multipliziert werden.

Beispiel

- Für $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 5 \\ 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ ist $A + B = \begin{pmatrix} 1+0 & 2+3 & 3+1 \\ 5+1 & 0+2 & 5+1 \\ 9+0 & 8+1 & 7-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 6 & 2 & 6 \\ 9 & 9 & 6 \end{pmatrix}$.
- Für $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 5 \\ 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}$ ist $2 \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 10 & 0 & 10 \\ 18 & 16 & 14 \end{pmatrix}$.

Rechenregel

- $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ (Distributivgesetz)
- $A + B = B + A$ (Kommutativgesetz)
- $A + (B + C) = (A + B) + C$ (Assoziativgesetz)

Die Matrizenmultiplikation ist **nicht** komponentenweise definiert; hier ist es komplizierter. Sie wird mit Hilfe des Skalarprodukts definiert. Seien

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad \text{und} \quad B \in \mathbb{R}^{n \times k}.$$

Der (i, j) -te Eintrag von $A \cdot B$ ist das Skalarprodukt der i -ten Zeile von A mit der j -ten Spalte von B . Also das Skalarprodukt eines Zeilenvektors mit einem Spaltenvektor.

Beispiel

Für $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$ sind

$$(A \cdot B)_{2,3} = (1 \ 2) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 2 + 6 = 8,$$

$$(A \cdot B)_{2,4} = (1 \ 2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 = 1 + 8 = 9,$$

$$(A \cdot B)_{3,1} = (4 \ 3) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 4 + 6 = 10.$$

Beispiel (Fortsetzung)

Dies wendet man nun auf alle möglichen Einträge von $A \cdot B$ an und erhält das gewünschte Produkt:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 11 & 13 \\ 5 & 4 & 8 & 9 \\ 10 & 6 & 17 & 16 \end{pmatrix}.$$

$$\left(A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 4} \right)$$

Bemerkung

Damit das Produkt $A \cdot B$ zweier Matrizen A und B sinnvoll definiert ist, muss A gleich viele Spalten haben wie B Zeilen. Das Produkt $A \cdot B$ ist wieder eine Matrix; mit der Zeilenanzahl von A und der Spaltenanzahl von B :

aus $(m \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{n} \times k)$ wird $(m \times k)$.

Beispiel (Matrix mal Matrix)

Für $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ ist

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 15 \\ 3 & 8 & 14 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}.$$

Beispiel (Matrix mal Vektor)

Für $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$ und $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 1} = \mathbb{R}^4$ ist

$$Ab = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 1} = \mathbb{R}^2.$$

Rechenregel

- $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ (Distributivgesetz)
- $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ (Assoziativgesetz)

Bemerkung

Bei der Matrizenmultiplikation gilt **nicht** das Kommutativgesetz; im Allgemeinen ist

$A \cdot B \neq B \cdot A$. Zum Beispiel für $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ist

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & * \\ * & * \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & * \\ * & * \end{pmatrix} = B \cdot A.$$

Anwendungsbeispiel für die Matrizenmultiplikation:

In einem Produktionsprozess werden aus den drei Rohstoffen R_1, R_2, R_3 zwei verschiedene Zwischenprodukte Z_1 und Z_2 hergestellt. Aus diesen Zwischenprodukten werden wiederum drei Endprodukte E_1, E_2, E_3 hergestellt. Gesucht ist der Zusammenhang zwischen den Rohstoffen und den Endprodukten.

Der Bedarf an Zwischenprodukte für die Endprodukte und der Bedarf an Rohstoffen für die Zwischenprodukte wird in den folgenden Tabellen hergestellt:

	Z_1	Z_2
E_1	3	2
E_2	2	1
E_3	3	3

	R_1	R_2	R_3
Z_1	3	4	1
Z_2	3	2	4

Es gelten also die folgenden Zusammenhänge:

$$E_1 = 3 \cdot Z_1 + 2 \cdot Z_2$$

$$E_2 = 2 \cdot Z_1 + 1 \cdot Z_2$$

$$E_3 = 3 \cdot Z_1 + 3 \cdot Z_2,$$

$$Z_1 = 3 \cdot R_1 + 4 \cdot R_2 + 1 \cdot R_3$$

$$Z_2 = 3 \cdot R_1 + 2 \cdot R_2 + 4 \cdot R_3.$$

In Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix}.$$

Einsetzen der zweiten Gleichung in die erste liefert den gesuchten Zusammenhang zwischen den Endprodukten und den Rohstoffen:

$$\begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix}.$$

Indem man die beiden Matrizen multipliziert, kann man diesen Zusammenhang auch in einer Matrix ausdrücken und so direkt ablesen:

$$\begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 16 & 11 \\ 9 & 10 & 6 \\ 18 & 18 & 15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix}.$$

1.4 Determinanten

Die **Determinante** ist eine Zahl (Skalar), die einer **quadratischen** Matrix zugeordnet ist. Jede quadratische Matrix besitzt eine Determinante; wir schreiben

$$\det(A) \text{ oder auch } |A|.$$

Die Determinante ist in der Mathematik eine wichtige Größe, die in vielen Bereichen, in denen Matrizen vorkommen, eine entscheidende Rolle spielt. Mit Hilfe von Determinanten kann man z.B. feststellen ob lineare Gleichungssysteme eindeutig lösbar sind, bzw. man kann mit ihnen solche Gleichungssysteme sogar lösen (Kapitel 2). Des Weiteren wird sie uns bei der Bestimmung von Extremstellen von Funktionen in mehreren Variablen (Kapitel 6) begegnen. Auch kann man mit ihrer Hilfe Volumen von mehrdimensionalen Objekten berechnen, was für uns aber keine Rolle spielt.

1.5 Berechnung der Determinante

Besonders einfach ist die Berechnung der Determinante bei (2×2) -Matrizen. Für $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ist

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

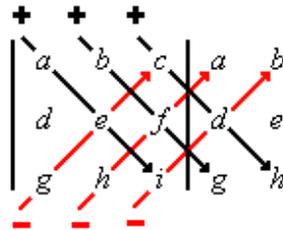
Bemerkung

Die Determinante ist nur bei **quadratischen** Matrizen definiert

Die Determinante einer (3×3) -Matrix kann man leicht mit der Regel von Sarrus berechnen. Nach dieser Regel besitzt die Matrix

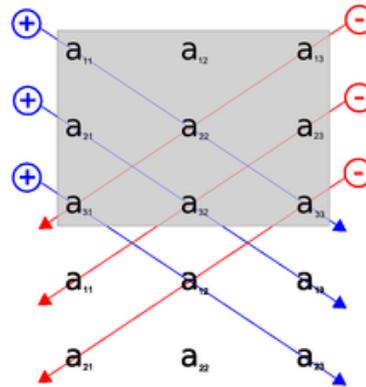
$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \text{ folgende Determinante: } \det(A) = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb.$$

Die Determinante wird dabei nach folgendem Schema berechnet:



Man schreibt die ersten beiden Spalten der Matrix rechts neben die Matrix und bildet Produkte von jeweils 3 Zahlen, die durch die schrägen Linien verbunden sind. Dann werden die nach unten verlaufenden Produkte addiert und davon die nach oben verlaufenden Produkte subtrahiert.

Eine andere übliche Vorgehensweise besteht darin, die ersten beiden Zeilen unten an die Matrix anzuhängen und dann nach dem Muster in der unten stehenden Abbildung vorzugehen.



Man erhält auf diese Weise als Determinante von A :

$$\det(A) = aei + dhc + gbf - ceg - fha - idb.$$

Vergleicht man dies mit den Vorgehen auf der vorherigen Seite, erkennt man, dass bei beiden Vorgehensweisen genau dieselbe Zahl heraus kommt.

Beispiel

Für $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ist

$$\begin{aligned} \det(A) &= 1 \cdot 5 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 3 + 4 \cdot (-3) \cdot 2 - 3 \cdot 5 \cdot 4 - 2 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot (-3) \cdot 2 \\ &= 5 + 6 - 24 - 60 - 2 + 6 \\ &= -69. \end{aligned}$$

Alternativ lässt sich die Determinante einer (3×3) -Matrix auch anders berechnen. Dieses Verfahren erscheint komplizierter als die Regel von Sarrus, ist aber allgemeiner und lässt sich auf Matrizen beliebiger (quadratischer!) Größe erweitern.

Für eine Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ ist mit diesem Verfahren

$$\begin{aligned} \det(A) &= a \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \cdot \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \cdot \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\ &= a \cdot (e \cdot i - f \cdot h) - b \cdot (d \cdot i - f \cdot g) + c \cdot (d \cdot h - e \cdot g). \end{aligned}$$

Diese Art der Berechnung nennt man auch Entwicklung nach der 1. Zeile.

Anstatt nach der 1. Zeile kann man bei der Determinantenberechnung auch nach jeder anderen beliebigen Zeile oder Spalte entwickeln.

Beispiel

Wir entwickeln die Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ nach der 2. Spalte:

$$\begin{aligned} \det(A) &= -b \cdot \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + e \cdot \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} - h \cdot \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} \\ &= -b \cdot (di - fg) + e \cdot (ai - cg) - h \cdot (af - cd). \end{aligned}$$

Beachte dabei die abwechselnden Vorzeichen vor den einzelnen Summanden.
Mit welchem Vorzeichen angefangen wird, sieht man an folgender „Vorzeichenmatrix“:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Dieses Prinzip setzt sich auf beliebige $(n \times n)$ -Matrizen fort.

Mit dem Verfahren der Entwicklung nach der i -ten Zeile/Spalte können wir jetzt beliebige Determinanten berechnen.

Es empfiehlt sich, nach einer Zeile/Spalte mit vielen 0-Einträgen zu entwickeln, damit der Aufwand so gering wie möglich wird.

Beispiel

Wir entwickeln die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ nach der 2. Zeile:

$$\det(A) = 0 + 0 + -(-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Die (3×3) -Matrix entwickeln wir nach der 3. Zeile (oder alternativ mit der Regel von Sarrus):

$$\begin{aligned} \det(A) &= -(-1) \cdot \left(-1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \right) = 1 \cdot (-1 \cdot (2 \cdot 4 - 4 \cdot 3)) \\ &= 1 \cdot (-1 \cdot (-4)) = 1 \cdot 4 = 4. \end{aligned}$$

Übung

Seien $v = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

- Berechne das Skalarprodukt $v \cdot w$.
- Berechne $|v|$.

Übung

Seien $a = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} -2 \\ t \\ 4 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$. Bestimme t so, dass a und b senkrecht aufeinander stehen.

Übung

Seien $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, sowie $C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Berechne

- $A \cdot B - B \cdot A$,
- $B \cdot b$,
- $\det(A)$ auf zwei verschiedene Arten,
- $\det(C)$.

2 Lineare Gleichungssysteme

2.1 Gleichungen in zwei Variablen

Für lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen bieten sich das Einsetzungsverfahren oder das Additionsverfahren als Lösungsmethoden an. Wir wenden beide Verfahren auf das folgende Gleichungssystem an:

$$3x - 4y = 5 \quad (1)$$

$$2x + 3y = 9 \quad (2)$$

Beim Einsetzungsverfahren wird eine Gleichung nach einer Variablen aufgelöst und dann in die andere Gleichung eingesetzt. Zuerst wird (1) nach x aufgelöst:

$$3x = 5 + 4y \implies x = 5/3 + 4/3 \cdot y$$

Einsetzen in (2) und nach y auflösen:

$$2 \cdot (5/3 + 4/3 \cdot y) + 3y = 9$$

$$10/3 + 8/3 \cdot y + 3y = 9$$

$$10/3 + 17/3 \cdot y = 9$$

$$17/3 \cdot y = 17/3.$$

Daraus folgt:

$$y = 1$$

Nun wird der Wert für y wieder in eine der beiden Ausgangsgleichungen eingesetzt, um den Wert für x zu erhalten. **Tipp:** Am besten nimmt man die Gleichung, die schon nach x aufgelöst wurde, um sich Rechenaufwand zu sparen:

$$x = 5/3 + 4/3 \cdot y$$

$$x = 5/3 + 4/3 \cdot 1$$

$$x = 5/3 + 4/3$$

$$\mathbf{x} = 3.$$

Bemerkung

Den gleichen Wert hätten wir auch erhalten, wenn wir y in Gleichung (1) eingesetzt hätten.

Beim **Additionsverfahren** (auch **Eliminationsverfahren**) werden die Gleichungen, bzw. Vielfache davon, geschickt addiert (bzw. subtrahiert), um eine Variable zu eliminieren.

$$\begin{array}{rcl} 3x - 4y & = & 5 \quad (I) \\ 2x + 3y & = & 9 \quad (II) \\ \hline 6x - 8y & = & 10 \quad (2 \cdot I) \\ - 17y & = & -17 \quad (I - 3 \cdot II) \end{array}$$

Es ergibt sich wieder $y = 1$. Die Unbekannte x wird wie oben durch Einsetzen bestimmt. Zum Beispiel liefert Einsetzen in (I): $3x - 4 = 5$, also $x = 3$.

2.2 Gauß-Verfahren

Sobald man Gleichungen mit drei Variablen hat, wird das Einsetzungsverfahren sehr umständlich. Man verwendet eigentlich nur noch das Additionsverfahren, üblicherweise nach einem ganz bestimmten Schema. Dieses wird im Folgenden formalisiert und an einem konkreten Beispiel vorgestellt. Das Schema nennt man auch Gauß-Verfahren (oder Gauß-Algorithmus).

Szenario:

Ein Hallenbetreiber benötigt für eine Veranstaltung in einer seiner Hallen Tische, Stühle und Ausstellungswände. Diese werden von einem LKW angeliefert, der 900kg Fracht transportieren kann und ein Ladevolumen von 50m^3 besitzt. Ein Tisch wiegt 10kg und benötigt ein Volumen von 0.6m^3 , ein Stuhl wiegt 3kg und benötigt 0.2m^3 und eine Stellwand wiegt 12kg bei einem Volumen von 0.4m^3 . Der Hallenbetreiber will die LKW-Kapazität optimal ausnutzen und zusätzlich pro Tisch 4 Stühle haben. Wie viele Tische, Stühle und Ausstellungswände kann er sich liefern lassen?

Mathematische Formulierung des Problems als lineares Gleichungssystem (LGS):

$x_1 =$ Anzahl der Tische, $x_2 =$ Anzahl der Stühle, $x_3 =$ Anzahl der Stellwände

Daraus ergibt sich das LGS

$$10 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 12 \cdot x_3 = 900$$

$$0.6 \cdot x_1 + 0.2 \cdot x_2 + 0.4 \cdot x_3 = 50$$

$$4 \cdot x_1 - x_2 = 0$$

oder in Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} 10 & 3 & 12 \\ 0.6 & 0.2 & 0.4 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 900 \\ 50 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Folgende Operationen werden elementare Zeilenumformungen genannt:

- das Vertauschen von zwei Zeilen,
- das Multiplizieren einer Zeile mit einer beliebigen Zahl ($\neq 0$),
- das Addieren eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile.

Im Optimalfall lässt sich das Gleichungssystem durch elementare Zeilenumformungen auf folgende Gestalt bringen:

$$\begin{aligned}x_1 + \quad * \quad \cdots \quad * &= c_1 \\x_2 + \quad \ddots \quad \vdots &= c_2 \\&\ddots \quad * = \vdots \\& &x_n = c_n.\end{aligned}$$

bzw. in Matrixschreibweise:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & * & \cdots & * & c_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & c_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & * & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & c_n \end{array} \right).$$

Die Lösung kann man nun durch Rückwärtsauflösen leicht ausrechnen:

$$x_n = c_n, \quad x_{n-1} = \dots$$

Veranschaulichung anhand unseres Ausgangsbeispiels:

$$\begin{array}{rcll}
 10x_1 & + & 3x_2 & + & 12x_3 & = & 900 & (I) \\
 0.6x_1 & + & 0.2x_2 & + & 0.4x_3 & = & 50 & (II) \\
 4x_1 & - & x_2 & & & = & 0 & (III) \\
 \hline
 x_1 & + & 0.3x_2 & + & 1.2x_3 & = & 90 & 1/10 \cdot (I) \\
 & & 0.02x_2 & - & 0.32x_3 & = & -4 & (II) - 0.6 \cdot (I) \\
 & & -2.2x_2 & - & 4.8x_3 & = & -360 & (III) - 4 \cdot (I) \\
 \hline
 x_1 & + & 0.3x_2 & + & 1.2x_3 & = & 90 & \\
 & & x_2 & - & 16x_3 & = & -200 & 50 \cdot (II) \\
 & & & - & 40x_3 & = & -800 & (III) + 2.2 \cdot (II) \\
 \hline
 x_1 & + & 0.3x_2 & + & 1.2x_3 & = & 90 & \\
 & & x_2 & - & 16x_3 & = & -200 & \\
 & & & & x_3 & = & 20 & -1/40 \cdot (III)
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}x_1 + 0.3x_2 + 1.2x_3 &= 90 \\x_2 - 16x_3 &= -200 \\x_3 &= 20\end{aligned}$$

Die Lösung wird nun durch Rückwärtsauflösen berechnet:

Aus der 3. Zeile liest man direkt $x_3 = 20$ ab. Dies setzt man nun in die 2. Zeile ein:

$$\begin{aligned}x_2 - 16 \cdot x_3 &= -200 \\x_2 - 16 \cdot 20 &= -200 \\x_2 - 320 &= -200 \\x_2 &= -200 + 320 \\x_2 &= 120\end{aligned}$$

Die Werte für x_2 und x_3 setzt man nun in die 1. Zeile ein:

$$\begin{aligned}x_1 + 0.3 \cdot x_2 + 1.2 \cdot x_3 &= 90 \\x_1 + 0.3 \cdot 120 + 1.2 \cdot 20 &= 90 \\x_1 + 36 + 24 &= 90 \\x_1 + 60 &= 90 \\x_1 &= 30.\end{aligned}$$

Die Lösung des LGS ist somit

$$x_1 = 30, x_2 = 120, x_3 = 20.$$

Alternativ kann man das Gleichungssystem auch auf diese Form bringen:

$$\begin{aligned}x_1 + 0 \cdots 0 &= c_1 \\x_2 + \cdots \vdots &= c_2 \\&\cdots 0 = \vdots \\&X_n = c_n\end{aligned}$$

bzw. in Matrixschreibweise

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & \cdots & \vdots & c_2 \\ \vdots & \cdots & \cdots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & c_n \end{array} \right)$$

Die Lösung kann man nun direkt ablesen:

$$x_1 = c_1, x_2 = c_2, \dots, x_n = c_n.$$

Vorteil: Die Lösung steht sofort da, man spart sich das Rückwärtsauflösen.

Nachteil: Man benötigt mehr (kompliziertere) Zeilenumformungen.

Es gibt allerdings nicht immer genau eine Lösung. Es können auch die Fälle „keine Lösung“ oder „unendlich viele Lösungen“ auftreten.

Tritt bei den elementaren Zeilenumformungen auf der linken Seite eine „Nullzeile“ auf, während der dazugehörige Eintrag auf der rechten Seite ungleich Null ist, gibt es **keine Lösung**.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & * & \cdots & * & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & * \\ \vdots & \ddots & 1 & * & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & c \end{array} \right)$$

Es kann keine Lösung geben, da die letzte Zeile bedeutet, dass $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = c$, was für $c \neq 0$ nicht lösbar ist.

Bemerkung

Ein LGS kann nur dann eindeutig lösbar sein, wenn mindestens gleich viele Gleichungen wie Unbekannte vorhanden sind.

2.3 Gleichungssysteme und Determinanten

Hat man ein LGS mit gleich vielen Gleichungen wie Unbekannten, kann man die eindeutige Lösbarkeit mit Hilfe der Determinante der Koeffizientenmatrix testen.

Satz

Ein LGS $A \cdot x = b$ mit **quadratischer** $(n \times n)$ -Matrix A , $b \in \mathbb{R}^n$ und $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ist genau dann eindeutig lösbar, wenn $\det \mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ gilt.

Beispiel

Wir betrachten das LGS

$$2x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 5$$

$$x_1 + x_2 - x_3 = 2$$

$$x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1$$

bzw. in Matrixschreibweise $A \cdot x = b$ mit Koeffizientenmatrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Es gilt $\det A = 4$ (z.B. mit der Regel von Sarrus), also ist das LGS eindeutig lösbar.

2.4 Cramersche Regel

Eindeutig lösbare lineare Gleichungssysteme mit gleich vielen Unbekannten wie Gleichungen kann man mit der **Cramerschen Regel** auch nur mit Determinanten und ohne Zeilenumformungen komplett lösen.

Gegeben sei ein LGS

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\&\vdots \\a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n\end{aligned}$$

bzw. in Matrixschreibweise $A \cdot x = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Vorausgesetzt es gilt $\det A \neq 0$, dann ist das LGS eindeutig lösbar und die Lösung des LGS ist gegeben durch

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A},$$

wobei A_i die Matrix ist, die gebildet wird, indem die i -te Spalte von A durch die rechte Seite des Gleichungssystems b ersetzt wird:

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \cdots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Beispiel

Betrachte das LGS

$$\begin{aligned}82x_1 + 45x_2 + 9x_3 &= 1 \\27x_1 + 16x_2 + 3x_3 &= 1 \\9x_1 + 5x_2 + 1x_3 &= 0\end{aligned}$$

bzw. in Matrixschreibweise $A \cdot x = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 82 & 45 & 9 \\ 27 & 16 & 3 \\ 9 & 5 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dann gilt mit der Cramerschen Regel:

Beispiel (Fortsetzung)

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{\det \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 45 & 9 \\ \mathbf{1} & 16 & 3 \\ \mathbf{0} & 5 & 1 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 82 & 45 & 9 \\ 27 & 16 & 3 \\ 9 & 5 & 1 \end{pmatrix}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{\det \begin{pmatrix} 82 & \mathbf{1} & 9 \\ 27 & \mathbf{1} & 3 \\ 9 & \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 82 & 45 & 9 \\ 27 & 16 & 3 \\ 9 & 5 & 1 \end{pmatrix}} = \frac{1}{1} = 1$$

Beispiel (Fortsetzung)

$$x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{\det \begin{pmatrix} 82 & 45 & \mathbf{1} \\ 27 & 16 & \mathbf{1} \\ 9 & 5 & \mathbf{0} \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 82 & 45 & 9 \\ 27 & 16 & 3 \\ 9 & 5 & 1 \end{pmatrix}} = \frac{-14}{1} = -14$$

2.5 Beispiel eines LGS mit unendlich vielen Lösungen

Szenario:

Ein Anleger will aus 3 verschiedenen Anlagefonds A_1, A_2, A_3 ein Fondspaket zusammenstellen. Fonds A_1 enthält 50% Aktien, 30% Rohstoffe und 20% Immobilien. Fonds A_2 enthält 25% Aktien, 40% Rohstoffe und 35% Immobilien und Fonds A_3 enthält 60% Aktien, 30% Rohstoffe und 10% Immobilien. Das Fondspaket soll einen Aktienanteil von 55% haben. Wie kann der Anleger die Anteile der einzelnen Fonds A_1, A_2, A_3 wählen, wenn der Anteil an A_3 möglichst groß/klein sein soll?

Formulierung als LGS:

$$\begin{aligned}0.5x_1 + 0.25x_2 + 0.6x_3 &= 0.55 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1\end{aligned}$$

wobei x_j der Anteil von Fonds A_j am Gesamtpaket entspricht.

2 Lineare Gleichungssysteme - 2.5 Beispiel eines LGS mit unendlich vielen Lösungen

Lösung des LGS (mit Gauß-Verfahren):

$$\begin{array}{rclcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 & (I) \\ 0.5x_1 & + & 0.25x_2 & + & 0.6x_3 & = & 0.55 & (II) \\ \hline x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 & \\ & & -0.25x_2 & + & 0.1x_3 & = & 0.05 & (II) - 0.5 \cdot (I) \\ \hline x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 & \\ & & x_2 & - & 0.4x_3 & = & -0.2 & -4 \cdot (II) \\ \hline x_1 & + & & + & 1.4x_3 & = & 1.2 & (I) - (II) \\ & & x_2 & - & 0.4x_3 & = & -0.2 & \end{array}$$

Da das LGS unterbestimmt ist (zu wenige Bedingungen), tauchen auf der linken Seite nicht nur 1 und 0 als Faktoren auf. Es gibt nicht nur eine, sondern mehrere Lösungen. Wir können die Lösungen aber nicht direkt ablesen. Trotzdem haben wir eine einfache Form des LGS, aus der wir die Lösungen leicht bestimmen können.

Da es „unendlich viele“ Lösungen gibt, müssen wir eine Unbestimmte variabel lassen. In diesem Fall bietet sich hierfür x_3 an.

Wir setzen $x_3 = t$.

Es folgen die Beziehungen:

$$x_1 + 1.4t = 1.2,$$

$$x_2 - 0.4t = -0.2.$$

Daraus folgt:

$$x_1 = 1.2 - 1.4t,$$

$$x_2 = -0.2 + 0.4t,$$

$$x_3 = t.$$

Wir können nun in Abhängigkeit von t alle Lösungen des LGS bestimmen.

Für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist

$$x_1 = 1.2 - 1.4t, x_2 = -0.2 + 0.4t, x_3 = t$$

eine Lösung unseres LGS.

In unserem Ausgangsszenario war nach derjenigen Lösung mit größtem/kleinstem Anteil an A_3 (also größtem/kleinstem x_3) gefragt. Da es sich bei unserer Aufgabe um eine Aufgabe mit „realem“ Bezug handelt, ist nicht jede Lösung sinnvoll.

Die Lösung mit kleinstem A_3 -Anteil ist z.B. nicht diejenige mit $t = 0$ (oder sogar $t < 0$), sondern diejenige mit $t = 0.5$. Denn t muss mindestens 0.5 sein, damit $x_2 \geq 0$ gilt. Also ist die Lösung mit kleinstem A_3 -Anteil:

$$x_1 = 0.5, x_2 = 0, x_3 = 0.5 \quad (t = 0.5).$$

Die Lösung mit größtem A_3 -Anteil ist:

$$x_1 = 0, x_2 = 1/7, x_3 = 6/7 \quad (t = 6/7).$$

Die Variable t kann in diesem Fall nicht größer sein, da sonst $x_1 \leq 0$ wäre.

Bemerkung

Bei Textaufgaben ist nicht jede mathematische Lösung sinnvoll. Je nach Aufgabenstellung und Zusammenhang müssen manchmal bestimmte mathematische Lösungen ausgeschlossen werden.

Übung

Löse folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}3x_1 + 2x_2 &= x_3 + 10 \\4x_1 - x_2 + 2x_3 &= -4 \\x_1 + 8x_3 &= -23\end{aligned}$$

Übung

Gegeben seien

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & -1 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Löse die beiden Gleichungssysteme $M \cdot x = c$ und $M \cdot x = d$ und nenne jeweils alle Lösungen.

Übung

Eine Firma stellt drei Arten von Regalen her. Die dafür benötigten Materialien können folgender Tabelle entnommen werden;

	Bretterstapel	Schraubensätze	Leistenpackungen
Regaltyp A	2	3	2
Regaltyp B	8	3	1
Regaltyp C	4	6	1

Die Firma hat noch 188 Bretterstapel, 147 Schraubensätze und 47 Leistenpackungen auf Lager und will das Lager vor den Betriebsferien komplett räumen. Besteht durch Produktion der drei Regaltypen dazu die Möglichkeit? Wenn ja, wie sieht die Produktion aus?

3 Funktionen

3.1 Grundbegriffe

Seien A, B zwei Mengen. Eine **Funktion** (oder **Abbildung**) f von A nach B (Schreibweise: $f : A \rightarrow B$ oder in langer Form auch $f : A \rightarrow B, x \mapsto y$) ist eine Vorschrift (Relation), die **jedem** Element $x \in A$ **genau** ein Element $y \in B$ zuordnet.

Für das einzige dem Element x zugeordneten Element $y \in B$ schreiben wir auch $f(x)$ und nennen es den **Funktionswert** von x .

Wir nennen A den **Definitionsbereich** von f und B die **Zielmenge** von f .

Ist die genaue Abbildungsvorschrift von f bekannt, schreiben wir anstatt $f : A \rightarrow B, x \mapsto f(x)$ auch einfach nur $f(x) = \dots$ (Beispiel: $f(x) = x^2$), wobei dann Definitionsbereich und Zielmenge nicht mehr explizit angegeben werden, sondern aus dem Kontext erschlossen werden müssen.

Bei uns wird die Zielmenge immer \mathbb{R} sein und der Definitionsbereich \mathbb{R} (Kapitel 4) oder \mathbb{R}^n (Kapitel 6) oder jeweils eine Teilmenge davon.

Wenn f nur als Rechenvorschrift gegeben ist, erhält man die Definitionsmenge D_f , indem man von \mathbb{R} oder \mathbb{R}^n diejenigen Elemente ausschließt, für die f nicht definiert ist.

Beispiel

- $f(x) = \frac{3x+1}{x-5}$, dann ist der Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R} \setminus \{5\}$.
- $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} = \mathbb{R}_{>0}$.
- $f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + \frac{2x_1}{3-x_2}$, $D_f = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 0, x_2 \neq 3\}$.

Eine Funktion muss nur die Eigenschaft erfüllen, dass jedem Element des Definitionsbereichs genau ein Element aus der Zielmenge zugeordnet wird. Die Umkehrung gilt dabei nicht. Ein Element der Zielmenge muss nicht unbedingt einem Element der Definitionsmenge zugeordnet sein.

Beispiel

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto -x^2$. Das Element 5 wird nicht „getroffen“. Es gibt kein $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = 5$.

Für eine Funktion $f : A \rightarrow B$ nennen wir die Menge

$$f(A) = \{y \in B \mid y = f(x) \text{ für ein } x \in A\}$$

den **Wertebereich** von f . Er besteht aus allen Elementen, welche als Funktionswert eines $x \in A$ auftreten. Im obigen Beispiel ist $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_{\leq 0}$.

Auch die zweite Umkehrung der Definition des Funktionsbegriffes gilt nicht. Ein Element der Zielmenge kann auch zwei oder mehreren Elementen des Definitionsbereichs zugeordnet sein.

Beispiel

Sei $f(x) = x^2$. Es gilt $4 = f(2) = f(-2)$. Die Zahl 4 wird also mehreren Elementen zugeordnet.

3.2 Der Grenzwertbegriff

In der Mathematik bezeichnet der **Grenzwert** (oder **Limes**) einer Funktion von \mathbb{R} nach \mathbb{R} an einer bestimmten Stelle denjenigen Wert, dem sich die Funktion in der Umgebung der betrachteten Stelle annähert.

Wir unterscheiden dabei zunächst den „linksseitigen“ und den „rechtsseitigen“ Grenzwert, abhängig davon, ob wir uns der betrachteten Stelle von links oder von rechts annähern.

Wir schreiben $\lim_{x \nearrow p} f(x)$ für den **linksseitigen Grenzwert** von f an der Stelle p . Dabei nähert sich x von links beliebig nahe an p an, bleibt aber daher immer kleiner als p .

Für den **rechtsseitigen Grenzwert** von f an der Stelle p schreiben wir $\lim_{x \searrow p} f(x)$. Dabei nähert sich x von rechts an p an und bleibt daher immer größer als p .

Diese Grenzwerte sind insbesondere dann von Bedeutung, wenn eine Funktion eine Definitionslücke hat oder wenn sie stufenweise definiert ist (siehe Beispiel).

Beispiel

- $f(x) = \frac{3x}{x-2}, D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

(Definitionslücke)

$$\lim_{x \nearrow 2} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \searrow 2} f(x) = +\infty$$

- $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{für } x < 1 \\ x^2 & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$

(stufenweise Definition)

$$\lim_{x \nearrow 1} f(x) = 0$$

Wir schreiben $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$ falls der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert von f für x gegen p identisch sind und nennen diesen Wert dann einfach Grenzwert. In diesem Fall sagen wir „der Grenzwert existiert“.

Beispiel

- $f(x) = \frac{2}{(x-1)^2}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$$

- $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+3)(x-3)}{(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} (x+3) = 6$$

Der Grenzwertbegriff wird auch verwendet, um das Verhalten von Funktionen im „Unendlichen“ auszudrücken (siehe Beispiel 1.–4.) oder am Rand des Definitionsbereichs (siehe Beispiel 5.), also wenn sowieso nur der links- **oder** rechtsseitige Grenzwert existiert.

Beispiel

- $f(x) = \frac{-x^2+1}{x-5}$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$
- $f(x) = \frac{2x}{3x^5-x}, \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$
- $f(x) = \frac{3x^3-6x+1}{6x^3+x^2}, \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1/2$
- $f(x) = e^x$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$
- $f : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \ln x, \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$

3.3 Stetigkeit

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion in einer Variablen mit Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$ und $a \in D$. Die Funktion f heißt **stetig** in a , wenn der Grenzwert von f an der Stelle a existiert und gleich dem Funktionswert von a ist, also wenn $\lim_{x \rightarrow a} \mathbf{f}(x) = \mathbf{f}(a)$ gilt.

Die Funktion f heißt stetig auf D , wenn f stetig in allen $a \in D$ ist.

Für Funktionen mit einer Variablen ist der Merksatz aus der Schule hilfreich: Eine Funktion ist stetig, wenn sie sich ohne Absetzen des Stiftes zeichnen lässt. (Es gibt jedoch auch Funktionen, die in dieser Vorlesung nicht behandelt werden, für die dieser Merksatz nicht gilt!)

Stetigkeit spielt vor allem bei zusammengesetzten Funktionen eine Rolle.

Beispiel

$$- f(x) = \begin{cases} x & \text{für } x < 0 \\ \sin(x) & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

Die Stetigkeit von f ist an allen Stellen klar, außer bei $x = 0$.

$\lim_{x \nearrow 0} f(x) = 0$, $f(0) = \sin(0) = 0$. Also ist f stetig in 0.

$$- f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3} & \text{für } x \neq 3 \\ 6 & \text{für } x = 3 \end{cases}$$

Da $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 6 = f(3)$, ist f stetig in 3.

Vorkommen von **nicht-stetigen** Funktionen in den Wirtschaftswissenschaften:

Beispiel (Stufenrabatte)

Ein Einkäufer bekommt ein Produkt billiger, je mehr er davon bestellt, z.B.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } 1 < x < 1000 \\ 0.8 & \text{für } x \geq 1000 \end{cases}$$

$f(x)$ sei dabei der Einkaufspreis einer Einheit eines Gutes in Abhängigkeit der eingekauften Menge x .

Beispiel

Auch bei Kostenfunktionen ist es nicht unüblich, dass sie nicht stetig sind. Ein Unternehmen habe die Kostenfunktion $C(x)$, die die Produktionskosten eines Gutes in Abhängigkeit seiner hergestellten Menge x angibt. Normalerweise produziert das Unternehmen nur an einer Produktionsstätte. Ab der Produktionsmenge $x = 100$ muss es auf eine zweite ausweichen, sodass sich folgende Kostenfunktion ergibt:

$$C(x) = \begin{cases} 30 + \left(\frac{1}{10}x\right)^2 & \text{für } 1 < x < 100 \\ \frac{1}{5}(x - 50)^2 - x & \text{für } x \geq 100 \end{cases}$$

Die Kostenfunktion $C(x)$ ist an der Stelle $x = 100$ nicht stetig, da

$$C(100) = \frac{1}{5}(100 - 50)^2 - 100 = 400 \text{ aber } \lim_{x \nearrow 100} C(x) = 30 + \left(\frac{1}{10} \cdot 100\right)^2 = 130 \neq 400.$$

Beispiel

Ein Unternehmen besitze die Kostenfunktion $C(x)$ mit Fixkosten c . Fixkosten sind diejenigen Kosten, die immer entstehen, also auch, wenn nichts produziert wird. Es gilt also $c = C(0)$.

$$C(x) = \begin{cases} c + \sqrt{x} + x & \text{für } 0 \leq x < 100 \\ 1.5x & \text{für } x \geq 100 \end{cases}$$

Frage: Bei welchen Fixkosten c besitzt das Unternehmen eine stetige Kostenfunktion?

Die einzige Stelle, an der die Funktion nicht stetig sein könnte, ist $x = 100$.

$C(100) = 1.5 \cdot 100 = 150$. Damit $C(x)$ stetig ist, muss also $\lim_{x \nearrow 100} C(x) = 150$ gelten. Es gilt

$$\lim_{x \nearrow 100} C(x) = c + \sqrt{100} + 100 = 110 + c.$$

Also muss $c = 40$ gelten.

Übung

Sei $f(x) = 1/\sqrt{x-5}$. Bestimme den Definitionsbereich D_f von f .

Übung

Berechne folgende Grenzwerte:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4 + 7x^6 - 1}{-3x^2 + 1 - x^6}$,
- $\lim_{x \nearrow 4} \frac{-3}{(x-4)^3}$,
- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-3x+5}{(x-2)^2}$.

Übung

$$\text{Sei } f(x) = \begin{cases} \frac{10-x^2}{x+1} & \text{für } x < 2 \\ \sqrt{2}\sqrt{x} & \text{für } x \geq 2 \end{cases}$$

Prüfe f auf Stetigkeit.

4 Differentialrechnung für Funktionen in einer Variablen

4.1 Differenzenquotient

Zentrales Thema der Differentialrechnung ist die Berechnung lokaler Veränderungen von Funktionen.

Ausgangspunkt ist dabei die durchschnittliche Änderungsrate einer Funktion in einem Intervall.

Diese durchschnittliche Änderungsrate wird Differenzenquotient genannt.

Mathematische Definition des Differenzenquotienten:

Sei f eine Funktion mit Definitionsbereich D und $[x_1, x_2] \subseteq D$, so nennt man

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

den Differenzenquotient von f im Intervall $[x_1, x_2]$.

Zeichnerisch gesehen ist der Differenzenquotient die Steigung der **Sekante** des Graphen von f durch die Punkte $(x_1, f(x_1))$ und $(x_2, f(x_2))$.

4.2 Ableitung

Wie schon erwähnt ist die *durchschnittliche* Änderungsrate (Differenzenquotient) in einem Intervall $[x_1, x_2]$ nur der Ausgangspunkt für die Differentialrechnung, der grundlegende Begriff ist die **momentane** Änderungsrate in einem Punkt x_1 . Diese wird Differentialquotient oder auch **Ableitung** von f an der Stelle x_1 genannt.

Der momentanen Änderungsrate an der Stelle x_1 nähert man sich an, indem man den Differenzenquotient im Intervall $[x_1, x_2]$ betrachtet und das Intervall immer kleiner werden lässt, in dem man x_2 immer näher an x_1 bringt.

Wenn man x_2 beliebig nahe an x_1 bringt, wird das Intervall $[x_1, x_2]$ beliebig (infinitesimal) klein. Die momentane Änderungsrate (Ableitung) im Punkt x_1 (sofern sie existiert) ist der Grenzwert der durchschnittlichen Änderungsrate im Intervall $[x_1, x_2]$ für x_2 gegen x_1 .

Mathematische Definition der Ableitung:

Sei f eine Funktion mit Definitionsbereich D und $x_1 \in D$, so nennt man den Grenzwert

$$\lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

die Ableitung von f an der Stelle x_1 und schreibt dafür auch $f'(x_1)$.

Zeichnerisch gesehen ist die Ableitung $f'(x_1)$ die Steigung der Tangente von f an der Stelle x_1 .

Bemerkung

1. Eine Funktion f ist nur im Punkt a **differenzierbar** (ableitbar), wenn sie im Punkt a auch stetig ist. Stetigkeit im Punkt a ist also eine notwendige Bedingung für Differenzierbarkeit (Beispiel 1.).
2. Eine Funktion f ist in den Randpunkten ihres Definitionsbereiches nicht differenzierbar (Beispiel 2.).
3. Ist eine Funktion f im Punkt a stetig, so ist es dennoch möglich, dass sie nicht differenzierbar ist. Grund dafür ist, dass der links- und rechtsseite Grenzwert des Differenzenquotienten in a gleich sein müssen (Beispiel 3.).

Beispiel (nicht-differenzierbare Funktionen)

1. $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \leq 2 \\ 1, & \text{falls } x > 2 \end{cases}$ ist im Punkt 2 nicht stetig und damit nicht differenzierbar.
2. $f(x) = \sqrt{x}$ hat Definitionsbereich $\mathbb{R}_{\geq 0}$ und ist damit im Punkt 0 nicht differenzierbar.
3. $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \leq 0 \\ x, & \text{falls } x > 0 \end{cases}$ ist zwar stetig im Punkt 0, aber nicht differenzierbar, da links- und rechtsseitiger Grenzwert des Differenzenquotienten nicht übereinstimmen:

$$\lim_{x \nearrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \nearrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \nearrow 0} \frac{0}{x} = 0, \text{ aber}$$

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \searrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \searrow 0} \frac{x}{x} = \lim_{x \searrow 0} 1 = 1.$$

In dieser Vorlesung werden wir hauptsächlich (insbesondere in allen Anwendungsaufgaben) nur Funktionen betrachten, die an den relevanten Punkten differenzierbar sind. Daher werden wir im Folgenden nicht jedes Mal von differenzierbaren Funktionen sprechen, sondern dies immer als gegeben voraussetzen.

4.3 Berechnung der Ableitung

Beispiel

Sei die Funktion $f(x) = x^2$ gegeben. Wir wollen die momentane Änderungsrate von f an der Stelle 3 berechnen.

Dazu berechnen wir zuerst den Differenzenquotienten von f in den Intervallen $[3, 4]$, $[3, 3.1]$ und $[3, 3.01]$:

- $\frac{f(4)-f(3)}{4-3} = \frac{16-9}{1} = \frac{7}{1} = 7$
- $\frac{f(3.1)-f(3)}{3.1-3} = \frac{9.61-9}{0.1} = \frac{0.61}{0.1} = 6.1$
- $\frac{f(3.01)-f(3)}{3.01-3} = \frac{9.0601-9}{0.01} = \frac{0.0601}{0.01} = 6.01$

Beispiel (Fortsetzung)

Formale Berechnung von $f'(3)$:

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3+h)^2 - 3^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{9 + 6 \cdot h + h^2 - 9}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6 \cdot h + h^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \cdot (6 + h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (6 + h) = \mathbf{6}\end{aligned}$$

Beispiel (Fortsetzung)

Wenn wir die Ableitungen an anderen Stellen wissen wollen, müssen wir diesen Schritt nicht jedes mal für ein anderes x_1 machen, sondern wir können die Ableitung nun ganz allgemein an einer **beliebigen** Stelle x_1 berechnen:

$$\begin{aligned}
 f'(x_1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_1 + h)^2 - x_1^2}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_1^2 + 2 \cdot x_1 \cdot h + h^2 - x_1^2}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \cdot x_1 \cdot h + h^2}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \cdot (2 \cdot x_1 + h)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} (2 \cdot x_1 + h) = \mathbf{2 \cdot x_1}
 \end{aligned}$$

d.h. für die Ableitung von $f(x) = x^2$ gilt $f'(x) = 2x$.

Die Ableitung f' ist also eine Funktion, die jedem x aus dem Definitionsbereich von f den Wert $f'(x)$ zuordnet.

Man braucht die Ableitung nicht zu jeder Funktion mit dem Differentialquotienten berechnen. Es genügt, die Ableitung von bestimmten Funktionen zu kennen. Zusammen mit den Ableitungsregeln können wir uns dann die Ableitungen von einer Vielzahl von Funktionen herleiten.

4.4 Ableitungsregeln

- **Potenzregel:**

$$f(x) = x^n; \quad f'(x) = n \cdot x^{n-1} \quad (\text{Beachte: } x^0 = 1)$$

- **Summenregel:**

Seien g und h zwei Funktionen mit gleichem Definitionsbereich. Dann gilt für die Ableitung der Funktion $f(x) = g(x) + h(x)$: $f'(x) = g'(x) + h'(x)$

Das heißt, eine Summe von zwei Funktionen kann getrennt abgeleitet werden.

- **Faktorregel:**

Sei $a \in \mathbb{R}$ eine Zahl und g eine Funktion. Dann gilt für die Ableitung der Funktion

$$f(x) = a \cdot g(x):$$

$$f'(x) = a \cdot g'(x)$$

Das heißt, konstante Faktoren bleiben beim Ableiten erhalten.

Mit den bisher bekannten Regeln können wir nun z.B. alle Polynome ableiten.

Beispiel

- $f(x) = 7x^4 - 3x^2 + 4$
 $f'(x) = 28x^3 - 6x$
- $g(x) = -x^3 + 2x + 4x^{-4} + 5$
 $g'(x) = -3x^2 + 2 - 16x^{-5}$

Bemerkung

- $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$
- $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$

Damit können wir nun auch einfache gebrochen rationale Funktionen und einfache Wurzelfunktionen ableiten.

Beispiel

- $f(x) = 3 \cdot \sqrt{x}$
 $f(x) = 3 \cdot \sqrt{x} = 3x^{\frac{1}{2}}$
 $f'(x) = 3 \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = 1.5x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1.5}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1.5}{\sqrt{x}}$
- $g(x) = \frac{4}{3x^2}$
 $g(x) = \frac{4}{3x^2} = \frac{4}{3}x^{-2}$
 $g'(x) = \frac{4}{3} \cdot (-2)x^{-3} = \frac{-8}{3}x^{-3} = \frac{-8}{3x^3}$

Ableitungen spezieller Funktionen:

- $f(x) = \sin(x) \implies f'(x) = \cos(x)$
- $f(x) = \cos(x) \implies f'(x) = -\sin(x)$
- $f(x) = e^x = \exp(x) \implies f'(x) = e^x = \exp(x)$
- $f(x) = \ln(x) \implies f'(x) = \frac{1}{x}$

Produktregel:

Seien g und h zwei Funktionen mit gleichem Definitionsbereich, dann gilt für die Ableitung der Funktion $f(x) = g(x) \cdot h(x)$:

$$f'(x) = g(x) \cdot h'(x) + g'(x) \cdot h(x)$$

oder in Kurzform: $(gh)' = gh' + g'h$.

Beispiel

- Die Produktregel widerspricht nicht der Faktorregel:

$$f(x) = 7 \cdot x^4$$

$$\text{mit Produktregel: } f'(x) = 7 \cdot 4x^3 + 0 \cdot x^4 = 28x^3$$

- Die Produktregel widerspricht nicht der Potenzregel:

$$f(x) = x^3 = x^2 \cdot x$$

$$\text{mit Produktregel: } f'(x) = x^2 \cdot 1 + 2x \cdot x = x^2 + 2x^2 = 3x^2$$

- $f(x) = x^2 \cdot e^x$

$$f'(x) = x^2 \cdot e^x + 2x \cdot e^x = (x^2 + 2x) \cdot e^x$$

- $f(x) = 4x \cdot \cos(x)$

$$f'(x) = -4x \cdot \sin(x) + 4 \cdot \cos(x)$$

Wir können jetzt schon eine Vielzahl von Funktionen ableiten. Durch eine weitere Regel, die sogenannte **Kettenregel**, werden wir noch mehr und vor allem kompliziertere Funktionen ableiten können. Dafür müssen wir aber zuerst einmal verstehen, was eine **Verkettung** von Funktionen ist.

Verkettung von Funktionen:

Seien g und h zwei Funktionen, wobei der Wertebereich von h im Definitionsbereich von g liegt. Die Funktion $f(x) = g(h(x))$ nennt man Verkettung von g und h . Wir schreiben hierfür auch $f = g \circ h$.

Beispiel

- $g(x) = \sqrt{x}$, $h(x) = 2x + 3$, $f = g \circ h$
 $f(x) = \sqrt{2x + 3}$
- $g(x) = e^{2x}$, $h(x) = x + 3$, $f = g \circ h$
 $f(x) = e^{2 \cdot (x+3)} = e^{2x+6}$
- $g(x) = x^2$, $h(x) = \sin(x)$
 $g \circ h(x) = (\sin(x))^2$
 $h \circ g(x) = \sin(x^2)$

Beachte: Im Allgemeinen gilt $g \circ h \neq h \circ g$.

Die Kettenregel:

Seien g und h zwei Funktionen, wobei der Wertebereich von h im Definitionsbereich von g liegt. Dann gilt für die Ableitung der Funktion $f(x) = g(h(x)) = g \circ h(x)$:

$$f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

oder in Kurzform: $(g \circ h)' = (g' \circ h) \cdot h'$

Beispiel

- $f(x) = (3x^2 + 6)^4$, $g(x) = x^4$, $h(x) = 3x^2 + 6$
 $g'(x) = 4x^3$, $h'(x) = 6x$
 $f'(x) = 4(3x^2 + 6)^3 \cdot 6x = 24x \cdot (3x^2 + 6)^3$
- $f(x) = (-2x + 4)^3$
 $f'(x) = 3(-2x + 4)^2 \cdot (-2) = -6(-2x + 4)^2$
- $f(x) = \sqrt{3x - 4} = (3x - 4)^{\frac{1}{2}}$
 $f'(x) = \frac{1}{2}(3x - 4)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3 = 1.5 \cdot (3x - 4)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1.5}{\sqrt{3x-4}}$
- $f(x) = \frac{3}{(4-x^2)^2} = 3(4 - x^2)^{-2}$
 $f'(x) = -6(4 - x^2)^{-3} \cdot (-2x) = 12x(4 - x^2)^{-3} = \frac{12x}{(4-x^2)^3}$

Beispiel

- $f(x) = \sin(3x + 5)$
 $f'(x) = \cos(3x + 5) \cdot 3 = 3 \cos(3x + 5)$
- $f(x) = (\sin(x) + 3)^2$
 $f'(x) = 2(\sin(x) + 3) \cdot \cos(x)$
- $f(x) = e^{2x+5}$
 $f'(x) = e^{2x+5} \cdot 2 = 2e^{2x+5}$

Die manchen vielleicht aus der Schule bekannte **Quotientenregel** ist im Grunde genommen keine eigenständige Regel, sondern resultiert aus der Produkt- und der Kettenregel sowie der Tatsache, dass $f^{-1} = \frac{1}{f}$ gilt. Es reicht also die Produkt- und die Kettenregel zu kennen, dann kann man auch Quotienten von Funktionen ableiten ohne die Quotientenregel zu kennen.

Quotientenregel:

Seien g und h zwei Funktionen mit gleichem Definitionsbereich, dann gilt für die Ableitung der Funktion $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$:

$$f'(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{(h(x))^2}$$

oder in Kurzform: $\left(\frac{g}{h}\right)' = \frac{g'h - gh'}{h^2}$.

Beispiel

Sei $f(x) = \frac{7x}{(3x+5)^2}$, dann ergibt sich die Ableitung als

- mit Quotientenregel:

$$f'(x) = \frac{7(3x+5)^2 - 7x \cdot 2(3x+5) \cdot 3}{(3x+5)^4} = \frac{7(3x+5)^2 - 42x \cdot (3x+5)}{(3x+5)^4} = \frac{7(3x+5) - 42x}{(3x+5)^3}$$

- ohne Quotientenregel: $f(x) = 7x \cdot (3x + 5)^{-2}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 7x \cdot (-2)(3x + 5)^{-3} \cdot 3 + 7 \cdot (3x + 5)^{-2} = -42x \cdot (3x + 5)^{-3} + 7 \cdot (3x + 5)^{-2} \\ &= \frac{-42x}{(3x + 5)^3} + \frac{7}{(3x + 5)^2} = \frac{-42x}{(3x + 5)^3} + \frac{7 \cdot (3x + 5)}{(3x + 5)^3} \\ &= \frac{-42x + 7(3x + 5)}{(3x + 5)^3} = \frac{7(3x + 5) - 42x}{(3x + 5)^3} \end{aligned}$$

4.6 Höhere Ableitungen

Natürlich kann man auch, da es wieder eine Funktion ist, f' ableiten. Für die Ableitung $(f')'$ von f' schreiben wir f'' und nennen sie die zweite Ableitung von f . Auf diese Weise kann man alle höheren (zweite, dritte,...) Ableitungen einer Funktion berechnen.

Beispiel

$$f(x) = 2 \cdot e^{3x^2}$$

$$f'(x) = 2 \cdot e^{3x^2} \cdot 6x = 12x \cdot e^{3x^2}$$

$$f''(x) = 12x \cdot e^{3x^2} \cdot 6x + 12 \cdot e^{3x^2} = 72x^2 \cdot e^{3x^2} + 12 \cdot e^{3x^2}$$

$$= (72x^2 + 12) \cdot e^{3x^2}$$

$$f'''(x) = (72x^2 + 12) \cdot e^{3x^2} \cdot 6x + 144x \cdot e^{3x^2} = (432x^3 + 72x) \cdot e^{3x^2} + 144x \cdot e^{3x^2} =$$

$$(432x^3 + 216x) \cdot e^{3x^2}$$

4.7 Anwendung in der Wirtschaft

Bemerkung

In wirtschaftlichen Anwendungen wird die Ableitung oft auch Grenzrate genannt. Das Argument x einer Funktion bezieht sich dann oft auf die Menge eines (produzierten) Gutes und bei den Funktionen handelt es sich dann oft um Kosten- oder Erlösfunktionen. Das heißt, die Funktion beschreibt die Kosten/den Erlös in Abhängigkeit der produzierten Menge. Die Ableitung der Kostenfunktion bezeichnet man als Grenzkosten. Sie gibt an, um wie viel die Kosten steigen, wenn der Output erhöht wird (das Gleiche gilt analog für den Grenzerlös).

Gängige Notationen:

Sei $C(x)$ eine Funktion, die in Abhängigkeit der produzierten Menge x eines bestimmten Gutes die Kosten der Produktion beschreibt. Wir nennen C die Kostenfunktion.

Die Ableitung $C'(x)$ nennen wir Grenzkostenfunktion.

Die Zahl $C(0)$ bezeichnet man als Fixkosten und die Funktion $A(x) = C(x)/x$ bezeichnet man als Durchschnittskostenfunktion.

4.8 Bestimmung von Extremwerten

Eine große Rolle spielt die Ableitung bei der Bestimmung von (lokalen) Extrempunkten einer Funktion.

Grafisch macht man sich bei Funktionen in einer Variablen leicht klar, dass eine Funktion f in einem Extrempunkt (Hoch- oder Tiefpunkt) immer eine waagrechte Tangente besitzt. Die Tangentensteigung ist daher 0.

Es gilt daher:

Satz

Ist x_0 ein Extrempunkt von f , dann ist $f'(x_0) = 0$.

Man sagt auch, dass $f'(x) = 0$ eine **notwendige** Bedingung für einen Extrempunkt ist.

Doch nicht nur grafisch ist diese Bedingung sinnvoll. Auch formal gesehen (mit der Definition der Ableitung) wird klar, dass x_0 kein Extrempunkt sein kann, wenn $f'(x_0) \neq 0$ ist.

Ist nämlich $f'(x_0) > 0$, so ist die Änderung von f an der Stelle x_0 positiv, d.h. f steigt an dieser Stelle an und somit ist f rechts von x_0 größer als bei x_0 (also kein Hochpunkt) und links von x_0 kleiner (also kein Tiefpunkt). Für $f'(x_0) < 0$, ist es genau umgekehrt.

Um (mögliche) Extrempunkte zu finden, reicht es also diejenigen x_0 mit $f'(x_0) = 0$ zu finden.

Allerdings folgt aus $f'(x_0) = 0$ nicht unbedingt, dass f bei x_0 einen Extrempunkt besitzt, wie das Beispiel $f(x) = x^3$ und $x_0 = 0$ zeigt. Hier hat f keinen Extrempunkt, sondern einen sogenannten **Sattelpunkt**.

Man sagt auch, die Bedingung $f'(x) = 0$ ist nicht **hinreichend**.

Man überlegt sich, dass ein Vorzeichenwechsel (VZW) der Ableitung eine hinreichende Bedingung für einen Extrempunkt darstellt.

Bei einem Hochpunkt ist f links von der Extremstelle steigend und rechts davon fallend. Die Ableitung (die gerade die Änderung von f beschreibt) wechselt also an der Extremstelle von $+$ zu $-$. Bei einem Tiefpunkt wechselt f' an der Extremstelle von $-$ zu $+$.

Die Änderung von f' wird gerade durch f'' beschrieben:

- wenn f' also an einer Stelle von $+$ zu $-$ wechselt, fällt f' , also ist $f'' < 0$,
- wenn f' an einer Stelle von $-$ zu $+$ wechselt, steigt f' , also ist $f'' > 0$.

Wir haben also eine hinreichende Bedingung für Extrempunkte von f gefunden:

Satz

Ist $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$, dann hat f bei x_0 einen Hochpunkt.

Ist $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$, dann hat f bei x_0 einen Tiefpunkt.

Beispiel

Sei $f(x) = (x - 1)^2 \cdot (x + 5)$. Bestimme alle Hoch- und Tiefpunkte von f .

$$f'(x) = (x - 1)^2 + 2 \cdot (x - 1)(x + 5)$$

$$(x - 1)^2 + 2 \cdot (x - 1)(x + 5) = 0$$

$$(x - 1) \cdot ((x - 1) + 2(x + 5)) = 0$$

$$(x - 1) \cdot (x - 1 + 2x + 10) = 0$$

$$(x - 1) \cdot (3x + 9) = 0$$

Ein Produkt ist genau dann 0, wenn einer der Faktoren 0 ist.

Wir haben also die beiden Nullstellen $x_1 = 1$ und $x_2 = -3$.

Beispiel (Fortsetzung)

Als Extremstellen kommen also $x_1 = 1$ und $x_2 = -3$ infrage.

$$f''(x) = (x - 1) \cdot 3 + (3x + 9) = 3(x - 1) + (3x + 9)$$

$f''(1) = 3 \cdot (1 - 1) + (3 + 9) = 12 > 0$ daraus folgt: Tiefpunkt.

$f''(-3) = 3(-3 - 1) + (3 \cdot (-3) + 9) = 3 \cdot (-4) = -12 < 0$ daraus folgt: Hochpunkt.

Um die y -Werte der Extremstellen zu bekommen, setzt man die x -Werte in f ein.

$$f(1) = (1 - 1)^2 \cdot (1 + 5) = 0$$

$$f(-3) = (-3 - 1)^2 \cdot (-3 + 5) = (-4)^2 \cdot 2 = 16 \cdot 2 = 32$$

Tiefpunkt: $(1, 0)$, Hochpunkt: $(-3, 32)$

Bemerkung

Bei der Überprüfung möglicher Extremstellen auf Hoch- und Tiefpunkt mit der zweiten Ableitung kann man bei $f''(x_0) = 0$ keine Aussage treffen. Bei x_0 kann dann kein VZW vorliegen (Sattelpunkt), es kann bei x_0 aber ebenso auch ein Hochpunkt als auch ein Tiefpunkt sein. Man muss dann explizit nachrechnen, ob ein VZW vorliegt.

Beispiel

$$f(x) = x^4$$

$$f'(x) = 4x^3$$

$$4x^3 = 0 \text{ daraus folgt: } x_1 = 0$$

$$f''(x) = 12x^2$$

$$f''(0) = 12 \cdot 0^2 = 0$$

$$f'(-1) = 4 \cdot (-1)^3 < 0$$

$$f'(1) = 4 \cdot 1^3 > 0$$

An der Stelle $x_1 = 0$ liegt für f' ein VZW von $-$ zu $+$ vor. Bei $x_1 = 0$ ist daher ein Tiefpunkt.

Bemerkung

Um mögliche Extremstellen zu finden, sucht man Nullstellen der ersten Ableitung. Es ist also essentiell Nullstellen berechnen zu können.

Methoden zur Nullstellenberechnung:

- **Satz vom Nullprodukt:**

Ein Produkt ist genau dann 0, wenn einer der Faktoren 0 ist.

$$(x - 4) \cdot (x + 2) = 0$$

Nullstellen (NS): $x_1 = 4$, $x_2 = -2$.

- **Wurzel ziehen:**

$$x^2 - 4 = 0, \text{ daraus folgt: } x^2 = 4$$

NS: $x_1 = 2$ **und** $x_2 = -2$

- **Ausklammern:**

$$x^3 - 9x = 0$$

$$x \cdot (x^2 - 9) = 0; \text{ NS: } x_1 = 0, x_2 = 3, x_3 = -3$$

- **Mitternachtsformel / abc-Formel:**

$$ax^2 + bx + c = 0; a, b, c \in \mathbb{R}$$

$$\text{NS: } x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Beispiel

$$- (x - 1)^2 + 5 \cdot (x - 1) = 0$$

$$(x - 1) \cdot (x - 1 + 5) = 0$$

$$(x - 1)(x + 4) = 0$$

$$\text{Nullstellen: } x_1 = 1, x_2 = -4$$

(Ausklammern)

(Satz vom Nullprodukt)

$$- 2x^3 + 2x^2 - 4x = 0$$

$$x \cdot (2x^2 + 2x - 4) = 0$$

$$\text{Nullstellen: } x_1 = 0, x_{2/3} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-4)}}{2 \cdot 2}$$

$$\text{Nullstellen: } x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = -2$$

(Ausklammern)

(Satz vom Nullprodukt + Mitternachtsformel)

$$- f(x) = (x + 3) \cdot e^x$$

$$f'(x) = (x + 3) \cdot e^x + e^x = 0$$

$$e^x \cdot ((x + 3) + 1) = 0$$

$$e^x \cdot (x + 4) = 0$$

$$\text{Nullstellen: } x_1 = -4$$

Beachte: $e^a > 0$ für alle $a \in \mathbb{R}$.

(Ausklammern)

(Satz vom Nullprodukt)

Beispiel (Unternehmen mit variablen Kosten und festem Verkaufspreis)

Ein Unternehmen produziert ein Gut G . Die Produktionskosten werden durch die Kostenfunktion $C(x)$ ausgedrückt, wobei x die Menge des produzierten Gutes G darstellt. Das Unternehmen kann eine Einheit des Gutes G zum festen Preis p verkaufen. Damit sieht die Gewinnfunktion $G(x)$ des Unternehmens folgendermaßen aus:

$$G(x) = p \cdot x - C(x),$$

wobei $G(x)$ den Gewinn in Euro in Abhängigkeit der produzierten Menge x an Gut G darstellt.

Wie sieht nun die optimale (gewinnmaximierende) Produktionsmenge aus?

Damit der Gewinn maximal wird, muss $G'(x) = 0$ gelten.

Also: $G'(x) = p - C'(x) = 0$. Dies ist gleichbedeutend mit

$$p = C'(x), \quad \text{Preis=Grenzkosten,}$$

was eine wichtige Aussage in der Mikroökonomik darstellt.

Beispiel (Unternehmen mit konstanten Kosten pro Produktionseinheit und variablem Verkaufspreis (z.B. im Monopol))

Ein Unternehmen stellt ein bestimmtes Produkt P her. Die Herstellungskosten von P betragen 10 Euro pro Stück. Die Preisabsatzfunktion des Produktes P lautet

$$p(x) = -0.002x^2 - 0.2x + 45$$

(x = Menge von Produkt P , $p(x)$ = Preis in Euro, den das Unternehmen **pro** Stück an P verlangen kann, um die Menge x zu verkaufen). Welche Menge x soll das Unternehmen von seinem Produkt P produzieren, um seinen Gewinn zu maximieren?

Sei $G(x)$ die Funktion, die den Gewinn in Abhängigkeit von der produzierten Menge x beschreibt. Es gilt:

$$\begin{aligned} G(x) &= p(x) \cdot x - 10 \cdot x \\ &= (-0.002x^2 - 0.2x + 45) \cdot x - 10x \\ &= -0.002x^3 - 0.2x^2 + 45x - 10x \\ &= -\mathbf{0.002x^3} - \mathbf{0.2x^2} + \mathbf{35x} \end{aligned}$$

Beispiel (Fortsetzung)

Wir suchen also ein Maximum von $G(x) = -0.002x^3 - 0.2x^2 + 35x$

$$G'(x) = -0.006x^2 - 0.4x + 35$$

$-0.006x^2 - 0.4x + 35 = 0$ und dann Mitternachtsformel

$$\text{Nullstellen: } x_1 = -116,67, \quad x_2 = 50$$

x_1 ist negativ und fällt somit raus, bleibt x_2 als mögliche Extremstelle.

Mit der zweiten Ableitung prüfen wir, ob es sich tatsächlich um ein Maximum handelt.

$$G''(x) = -0.012x - 0.4$$

$$G''(50) = -0.012 \cdot 50 - 0.4 = -0.6 - 0.4 = -1 < 0$$

Also liegt für $x_2 = 50$ ein Maximum vor.

Übung

Leite folgende Funktionen ab:

- $f(x) = 3x \cdot (2x + 5)^2$
- $g(x) = 2x \cdot e^{(-x+3)}$
- $h(x) = \frac{2x^2}{3x-4}$

Übung

Berechne alle Hoch- und Tiefpunkte der Funktion $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - 1.5x^2 + 2$

Übung

Schaue dir Beispiel auf Folie 127 genau an und versuche es einerseits zu verstehen und mache dir andererseits anhand dessen das Gelernte aus diesem Kapitel nochmals klar.

Übung

Die Funktion $f(x) = e^{0.1x-6} \cdot (x^2 - 12x + 36) + 5$ beschreibt den Wassergehalt eines Stausees innerhalb eines Tages (x in Stunden, $0 \leq x \leq 24$). Zu welchem Zeitpunkt hat der See am wenigsten Wasser? Wie viel Wasser enthält er zu diesem Zeitpunkt? Zu welchem Zeitpunkt hat der See den größten Abfluss?

Übung

Eine Funktion f hat folgende allgemeine Funktionsgleichung: $f(x) = ax^2 + bx + c$. Wir wissen, dass $f(2) = 4$ gilt, und dass f bei $(1.5, 4.25)$ einen Hochpunkt besitzt. Bestimme aus diesen Informationen die genaue Funktionsgleichung von f .

Übung

An welchen Punkten in \mathbb{R} ist die Funktion $f(x) = |x|$ differenzierbar? Was ist die Ableitung in diesen Punkten?

5 Integralrechnung für Funktionen in einer Variablen

5.1 Integrale

Die Integralrechnung ist in gewisser Weise das Gegenstück der Differentialrechnung. Anstatt von einer gegebenen Funktion etwas über ihre Änderung auszusagen, kann man mit Hilfe der Integralrechnung für gegebene Änderungsraten einer Größe etwas über den tatsächlichen Wert der Größe sagen.

Anschaulich betrachtet wird mit dem Integral der Flächeninhalt unter einer Kurve berechnet (Flächeninhalt zwischen der Kurve und der x -Achse).

Definition:

Sei $f(x)$ eine Funktion mit Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$ und $[a, b] \in D$. Wir bezeichnen mit

$$\int_a^b f(x)dx \text{ das } \underline{\text{Integral}} \text{ von } f \text{ im Intervall } [a, b].$$

Wir sagen auch Integral von f von a bis b .

Es spielt dabei keine Rolle, wie man die Integrationsvariable nennt. Genauso gut könnte man auch

$$\int_a^b f(t)dt$$

schreiben.

Das Integral von f von a bis b ist der (orientierte) Flächeninhalt zwischen der x -Achse und der Kurve von f zwischen a und b .

Orientiert bedeutet dabei, dass Flächen unterhalb der x -Achse negativ gewertet werden.

Satz (Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung)

Sei $f(x)$ eine Funktion und $f'(x)$ ihre Ableitung, dann gilt:

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a).$$

Aus dem Hauptsatz folgt:

- $f(b) = f(a) + \int_a^b f'(x)dx$
- $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$
- $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(x)dx$

5.2 Stammfunktionen

Definition:

Sei eine Funktion f gegeben. Eine Funktion F nennt man Stammfunktion von f , wenn $F' = f$ gilt.

Das Bilden einer Stammfunktion nennen wir auch integrieren oder unbestimmt integrieren¹. Eine Funktion, die eine Stammfunktion besitzt, nennt man auch integrierbar.

Bemerkung

Jede stetige Funktion ist integrierbar, besitzt also eine Stammfunktion.

¹Das Wort *aufleiten* ist Umgangssprache und keine mathematische Fachsprache. Schließlich sagen wir auch nicht „8 tief 3 ergibt 2“, nur weil wir auch „2 hoch 3 ergibt 8“ sagen.

Bemerkung

Wenn F eine Stammfunktion von f ist, dann ist auch $F + c$ eine Stammfunktion von f , für alle $c \in \mathbb{R}$. Eine integrierbare Funktion besitzt also unendlich viele Stammfunktionen. Durch Zusatzbedingungen (häufig Anfangswerte) kann man diese eindeutig bestimmen.

Sei F eine Stammfunktion von f . Mit dem Hauptsatz gilt dann:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Wir schreiben auch:

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Für die Berechnung des Integrals spielt es keine Rolle, welche Stammfunktion man nimmt. Es gilt $(F(b) + c) - (F(a) + c) = F(b) - F(a)$ für alle $c \in \mathbb{R}$ und somit ist das Integral unabhängig von c .

Man schreibt auch $\int f(x)dx = F(x) + c$ für die Menge der Stammfunktionen und nennt dies das **unbestimmte Integral** von f .

Beispiel

- $f(x) = x^3; F(x) = \frac{1}{4}x^4$
- $f(x) = -3x^5; F(x) = -\frac{1}{2}x^6$
- $f(x) = 2(x+4)^3; F(x) = \frac{1}{2}(x+4)^4$
- $f(x) = 4(3x+1)^{-2}; F(x) = 4 \cdot (-1)(3x+1)^{-1} \cdot \frac{1}{3} = \frac{-4}{3}(3x+1)^{-1}$
- $f(x) = e^{3x}; F(x) = \frac{1}{3}e^{3x}$
- $f(x) = 4e^{2x+1}; F(x) = 4e^{2x+1} \cdot \frac{1}{2} = 2e^{2x+1}$
- $f(x) = \sin(3x); F(x) = -\cos(3x) \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}\cos(3x)$
- $f(x) = e^{2x+1} + x^2 - 3; F(x) = \frac{1}{2}e^{2x+1} + \frac{1}{3}x^3 - 3x$
- **Bestimme diejenige Stammfunktion F von $f(x) = 3x + 4$ mit $F(1) = 3$:**
 $F(x) = 1.5x^2 + 4x + c; F(1) = 1.5 + 4 + c = 5.5 + c$; **daraus folgt: $c = -2.5$**
Also: $F(x) = 1.5x^2 + 4x - 2.5$

Beispiel (Fortsetzung)

- $f(x) = x^{-1}; F(x) = \ln(x)$
- $f(x) = (3x - 1)^{-1}; F(x) = \ln(3x - 1) \cdot \frac{1}{3}$
- $f(x) = (-2x + 4)^3; F(x) = \frac{1}{4}(-2x + 4)^4 \cdot \frac{-1}{2} = -\frac{1}{8}(-2x + 4)^4$
- $f(x) = (2x^2 + 4)^2$; können wir nicht wie oben mithilfe der Kettenregel integrieren.
 $f(x) = 4x^4 + 16x^2 + 16; F(x) = \frac{4}{5}x^5 + \frac{16}{3}x^3 + 16x$
- $f(x) = x \cdot (2x^2 + 4)^3; F(x) = (2x^2 + 4)^4 \cdot \frac{1}{16}$
- $f(x) = x \cdot (x + 1)^2$; auch hier müssen wir zuerst ausklammern, bevor wir integrieren.
 $f(x) = x \cdot (x^2 + 2x + 1) = x^3 + 2x^2 + x; F(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2$
- $f(x) = x \cdot e^{x^2}; F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2}$
- $f(x) = x^2 \cdot e^x$; können wir mit unseren Methoden nicht integrieren.
 $F(x) = (x^2 - 2x + 2) \cdot e^x$
- $f(x) = e^x \cdot \sin(x)$; können wir mit unseren Methoden nicht integrieren.
 $F(x) = \frac{1}{2}e^x \cdot (\sin(x) - \cos(x))$

5.3 Uneigentliche Integrale

Mithilfe des Grenzwertbegriffs kann man auch den Flächeninhalt unter einer Kurve in einem „unendlich“ großen Bereich berechnen. Es kann sein, dass eine Fläche zwar unbeschränkt ist, der Flächeninhalt aber trotzdem nur endlich groß ist.

Dabei kann die Fläche sowohl in x - als auch in y -Richtung unbeschränkt sein. Solch einen Flächeninhalt nennt man **uneigentliches Integral**.

Beispiel

$$\int_0^2 \frac{1}{x} dx, \quad \int_3^{\infty} \frac{1}{x} dx$$

Beispiel (1)

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx &= \lim_{a \rightarrow \infty} \int_1^a \frac{1}{x^2} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^a \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{a} - \left(-\frac{1}{1} \right) \right) = \lim_{a \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{a} + 1 \right) \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{a} \right) \\ &= 1 - 0 \\ &= 1\end{aligned}$$

Beispiel (2)

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx &= \lim_{a \rightarrow \infty} \int_1^a \frac{1}{x} dx \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} [\ln x]_1^a \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \ln a - \ln 1 \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \ln a - 0 \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \ln a \\ &= \infty\end{aligned}$$

Beispiel (3)

$$\begin{aligned}\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx &= \lim_{a \rightarrow 0} \int_a^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} [2\sqrt{x}]_a^4 \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} (2\sqrt{4} - 2\sqrt{a}) \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} (2 \cdot 2 - 2\sqrt{a}) \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} (4 - 2\sqrt{a}) \\ &= 4 - 2 \cdot 0 \\ &= 4\end{aligned}$$

Beispiel (4)

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{x} dx &= \lim_{a \rightarrow 0} \int_a^1 \frac{1}{x} dx \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} [\ln x]_a^1 \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} (\ln 1 - \ln a) \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} (0 - \ln a) \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} -\ln a \\ &= \infty\end{aligned}$$

Anwendungsbeispiel

Die Funktion $f(x) = 13.5x^2 - 80x - 4$ beschreibt für $0 \leq x \leq 12$ die aktuelle Wertänderung eines Aktienpakets (x in Monaten) innerhalb eines Jahres. Die Wertänderung des Pakets ist zu Beginn des Jahres negativ, d.h. das Paket macht Verlust, irgendwann fängt der Wert aber wieder an zu steigen. Nach 8 Monaten hat das Aktienpaket einen Wert von 1212 Euro. Bestimme die Funktion, die zu jedem Zeitpunkt x den Wert des Aktienpakets beschreibt.

Welchen Wert hat es am Ende des Jahres? Welchen Wert hatte es am Anfang des Jahres? Zu welchem Zeitpunkt innerhalb des Jahres war der Wert am geringsten? Zu welchem Zeitpunkt nach Jahresminimum hat das Paket wieder den gleichen Wert wie am Anfang? Zu welchem Zeitpunkt machte das Aktienpaket den größten Verlust?

Übung

Finde eine Stammfunktion F von

- $f(x) = 3 \cdot e^{2x-4}$
- $f(x) = 3x \cos(x^2)$
- $f(x) = \sqrt{4x} - 3$
- $f(x) = (x + 1) \cdot e^x$ (Hinweis: ausklammern und dann an Produktregel denken)

Übung

Finde diejenige Stammfunktion F von f mit $F(0) = 1$:

- $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5$
- $f(x) = e^{2x}$
- $f(x) = \frac{-6}{(x+1)^3}$

Übung

Berechne das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^0 5e^x dx$.

Übung

Bearbeite das Anwendungsbeispiel auf Seite 145.

6 Differentialrechnung für Funktionen in mehreren Variablen

6.1 Einleitung

Da in der Praxis Funktionen selten nur von einer Variablen abhängen, ist es durchaus sinnvoll auch Funktionen in mehreren Variablen zu betrachten.

Beispiel

Nachfrage nach einem Gut q hängt sowohl von seinem Preis p als auch vom Einkommen y ab:

$$q(p, y) = 500 - 4p + 0.2y.$$

Wir wollen deshalb den Begriff der Ableitung auf Funktionen in mehreren Variablen verallgemeinern, um auch für solche Funktionen Aussagen über Hoch- und Tiefpunkte treffen zu können.

In diesem Kapitel betrachten wir deshalb immer Funktionen von \mathbb{R}^n nach \mathbb{R} . Wir schreiben dann $f(x_1, \dots, x_n)$ oder im Fall $n = 3$ nennen wir die Variablen anstatt x_1, x_2, x_3 auch x, y, z . Natürlich haben die Funktionen mit mehreren Variablen nicht immer ganz \mathbb{R}^n als Definitionsbereich sondern manchmal auch nur eine Teilmenge davon (siehe Beispiel auf Seite 174).

Grafisch lassen sich (außer natürlich den Funktionen in einer Variable), nur die Funktionen mit zwei Variablen schön darstellen und somit auch gut vorstellen.

Beispiel

$$f(x, y) = x \cdot e^{-x^2 - y^2}$$

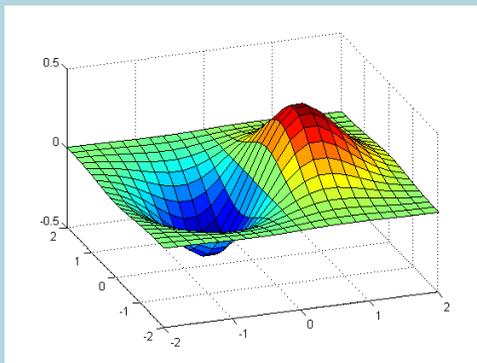


Abbildung: *

als 3D-Graph

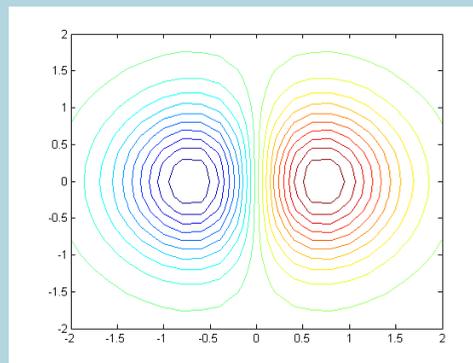


Abbildung: *

mit Höhenlinien

Definition:

Sei $f(x_1, \dots, x_n)$ eine Funktion in n Variablen. Wie im Fall einer Variablen können wir f nach einer festen Variable x_j ableiten, indem wir alle anderen Variablen als Konstanten betrachten. Diese Ableitung nennen wir **partielle Ableitung** von f nach x_j und schreiben

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} \text{ oder auch } \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_n),$$

da die partielle Ableitung nach x_j selber wieder eine Funktion in den Variablen x_1, \dots, x_n ist.

Beispiel

- $f(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 2x_1x_2$
- $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 6x_1 + 2x_2$
- $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 2x_1$

Andere gebräuchliche Schreibweisen anstatt $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ für die partielle Ableitung nach x_i sind:

$$\partial_{x_i} f \quad \text{und} \quad f_{x_i}$$

(letztere sehr häufig in Literatur zu Wirtschaftswissenschaften)

Wie im Fall einer Variablen interessiert auch im Fall von n Variablen meist die partielle Ableitung an einem bestimmten Punkt $a = (a_1, \dots, a_n)$. Da $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ eine Funktion ist, wird dann einfach anstelle der Variable x_i die i -te Komponente a_i von a eingesetzt.

Beispiel

$$f(x, y, z) = 3x^2 - e^y + 2xz^3$$

Berechne die partielle Ableitung nach x und y im Punkt $(3, 0, 1)$.

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 6x + 2z^3$
- $\frac{\partial f}{\partial x}(3, 0, 1) = 20$
- $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = -e^y$
- $\frac{\partial f}{\partial y}(3, 0, 1) = -1$

Die Bedeutung der partiellen Ableitung nach x_i ist die gleiche wie im Fall einer Variablen. $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ ist die Änderung der Größe f im Punkt a , wenn a_i verändert wird und alle anderen Komponenten von a konstant bleiben. Grafisch ausgedrückt bedeutet es gerade die Änderung von f im Punkt a in x_i -Richtung. Betrachtet man f im Punkt a nur entlang der Richtung x_i , kann man dies als Funktion in einer Variablen sehen. $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ ist dann genau die Steigung der Tangente dieser Funktion an der Stelle a_i .

6.3 Der Gradient

Definition:

Sei $f(x_1, \dots, x_n)$ eine Funktion in n Variablen mit Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann lassen sich die n partiellen Ableitungen in einem (Spalten-)Vektor anordnen. Dieser wird **Gradient** von f genannt und mit ∇f bezeichnet.

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

Auch in den Gradienten kann wieder ein Punkt $a \in D$ eingesetzt werden.

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right).$$

Bemerkung

Streng genommen wird der Gradient in der Mathematik immer als Spaltenvektor geschrieben.

Beispiel

$$f(x, y, z) = 3x^2 - e^y + 2xz^3$$

$$\nabla f(x, y, z) = (6x + 2z^3, -e^y, 6xz^2)$$

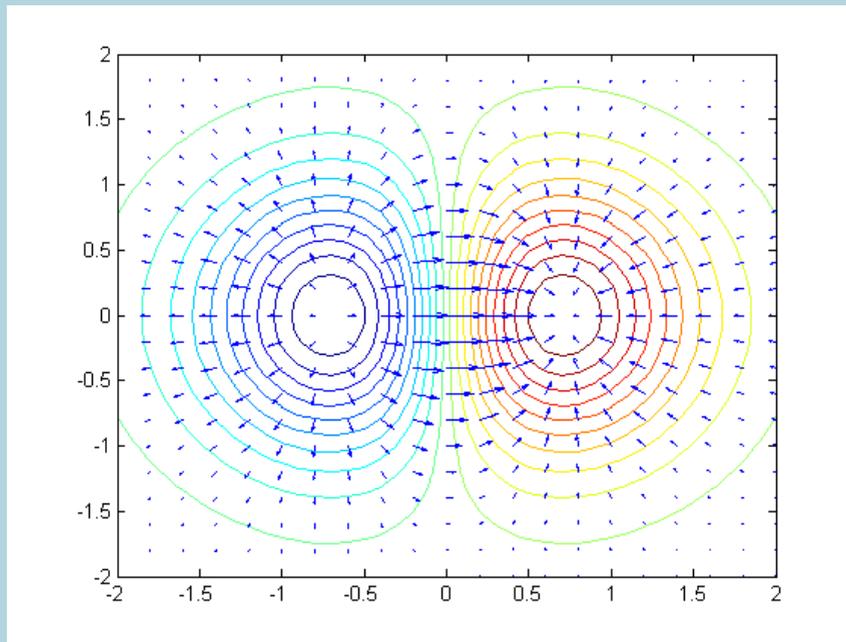
$$\nabla f(-2, 1, 2) = (4, -e, -48)$$

Bemerkung

- Der Gradient an einem Punkt a ist derjenige Vektor, der in die Richtung des steilsten Anstiegs zeigt.
- Der Gradientenvektor an einem Punkt a steht senkrecht zur Niveaulinie von $f(a)$ (bzw. zu deren Tangentialvektor in a).
- Der Gradient wird außerdem benutzt, um die Änderung der Funktion an einem Punkt entlang einer beliebigen Richtung zu berechnen.

Beispiel

$$f(x, y) = x \cdot e^{-x^2 - y^2}$$



6.4 Bestimmung von Extremstellen

Sei $f(x_1, \dots, x_n)$ eine Funktion in n Variablen. Analog zu Funktionen in einer Variablen ist eine notwendige Bedingung dafür, dass $a = (a_1, \dots, a_n)$ eine Extremstelle von f ist, dass die partiellen Ableitungen und somit der Gradient von f in a null ist, was man sich auch anschaulich leicht klarmacht.

Satz

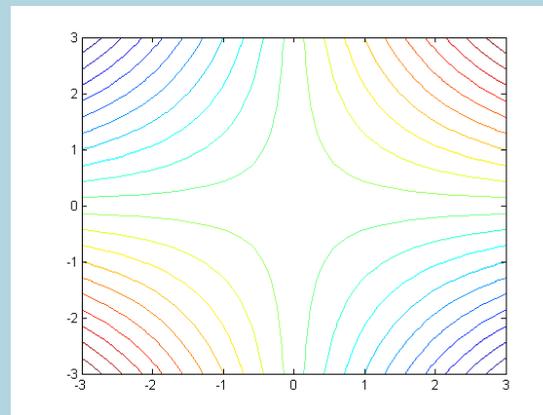
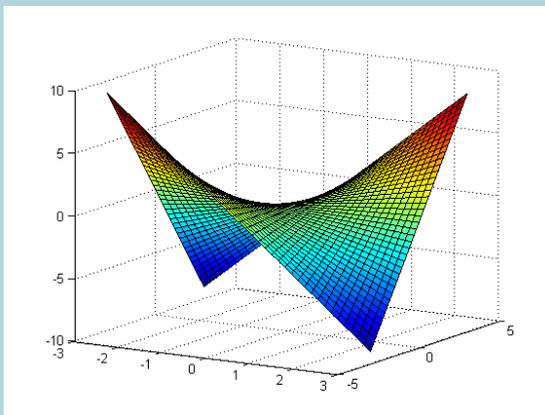
Ist a eine Extremstelle von f , dann ist $\nabla f(a) = (0, \dots, 0)^T$.

Ein Punkt, an dem der Gradient null ist, nennt man kritischen Punkt. Die kritischen Punkte sind die möglichen Extremstellen.

Auch bei Funktionen in mehreren Variablen ist diese Bedingung nicht hinreichend.

Beispiel

$$f(x, y) = x \cdot y$$



$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

Daraus folgt: $(0, 0)$ ist kritischer Punkt

Wie im Fall einer Variablen braucht man eine Art zweite Ableitung um weitere Aussagen über mögliche Extrempunkte machen zu können. Wir müssen also den Begriff der zweiten Ableitung auf Funktionen mit mehreren Variablen verallgemeinern.

6.5 Höhere Ableitungen

Sei $f(x_1, \dots, x_n)$ eine Funktion in n Variablen. Da die partielle Ableitung von f wieder eine Funktion in n Variablen ist, kann jede partielle Ableitung wieder partiell nach jedem x_i abgeleitet werden. Es gibt also neben den n ersten (partiellen) Ableitungen n^2 viele zweite Ableitungen.

Notation:

Wir schreiben $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)$ für die partielle Ableitung nach x_i von der partiellen Ableitung nach x_j von f .

Anstatt $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}$ schreiben wir auch $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$.

Satz (von Schwarz)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Das heißt, es ist egal ob man eine Funktion zuerst nach x_i und dann nach x_j partiell ableitet oder anders herum.

Beispiel

$$f(x, y, z) = 3xyz^2 - x \cdot \sin(y) + 3x^2z$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (6xyz + 3x^2) = 6yz + 6x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial z} (3yz^2 - \sin(y) + 6xz) = 6yz + 6x$$

Definition:

Die zweiten partiellen Ableitungen lassen sich in einer Matrix anordnen, der sogenannten **Hesse-Matrix** von f :

$$H_f = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=1,\dots,n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Wegen dem Satz von Schwarz ist die Hesse-Matrix symmetrisch.

Wie der Gradient kann auch die Hesse-Matrix von f in einem Punkt $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ aus dem Definitionsbereich von f ausgewertet werden. Die Hesse-Matrix von f am Punkt a ist dann

$$H_f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{i,j=1,\dots,n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(a) \end{pmatrix}.$$

Die Hesse-Matrix nimmt also die Rolle der zweiten Ableitung ein. Wie im Fall einer Variablen benötigen wir sie, um weitere Aussagen über die kritischen Punkte zu treffen und um gegebenenfalls zu unterscheiden, ob ein Extrempunkt ein Hoch- oder ein Tiefpunkt ist. Hierfür gibt es verschiedene Methoden (z.B. mit Determinanten von Teilmatrizen der Hesse-Matrix). Leider sind die Methoden nicht ganz so leicht wie im Fall einer Variablen ($f''(x) < 0$ bzw. $f''(x) > 0$). Wir betrachten deshalb nur den Fall von Funktionen in zwei Variablen.

6.6 Hinreichende Extremwertbedingungen

Sei $f(x, y)$ eine Funktion in 2 Variablen und (x_0, y_0) ein kritischer Punkt von f , d.h.

$$\nabla f(x_0, y_0) = 0$$

und sei $H = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ die Hesse-Matrix von f im Punkt (x_0, y_0) (d.h. $H = H_f(x_0, y_0)$).

Dann gelten folgende hinreichende Bedingungen:

- Ist $\det H > 0$ und $a > 0$, dann ist (x_0, y_0) ein **Tiefpunkt** von f . (Vgl. $f'' > 0$ im Fall einer Variablen.)
- Ist $\det H > 0$ und $a < 0$, dann ist (x_0, y_0) ein **Hochpunkt** von f . (Vgl. $f'' < 0$ im Fall einer Variablen.)
- Ist $\det H < 0$ und $a \neq 0$, dann ist (x_0, y_0) ein **Sattelpunkt** und somit kein Extrempunkt von f .

Bemerkung

Man braucht wirklich die Bedingung > 0 oder < 0 , hat man nur \geq oder \leq , lässt sich keine Aussage treffen.

Ebenso kann man keine Aussage treffen, wenn $\det H = 0$ gilt.

Beispiel

Gegeben sei die Funktion $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x + 8y + 20$. Gesucht sind alle Extrempunkte von f . Es gilt:

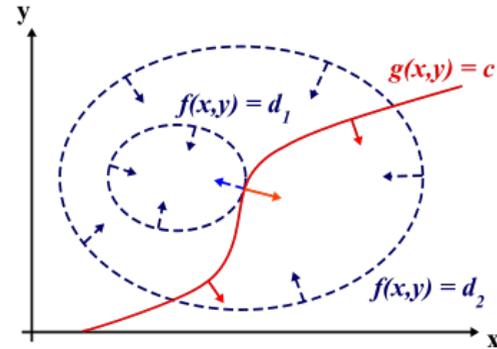
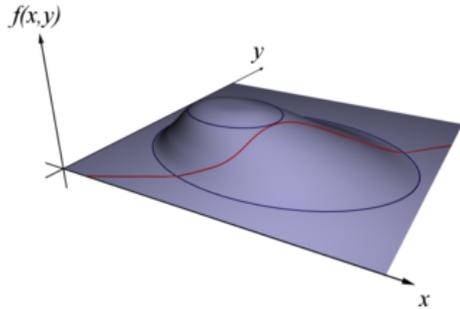
$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x - 4 \\ 2y + 8 \end{pmatrix} \text{ und somit ist } (2, -4) \text{ einziger kritischer Punkt von } f.$$

Weiter gilt für die Hesse-Matrix $H_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ und somit auch $H = H_f(2, -4) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Also folgt $\det H = 4 > 0$ und $2 > 0$, also ist der Punkt $(2, -4)$ nach obigen hinreichenden Bedingungen **Tiefpunkt** der Funktion f .

6.7 Optimierung unter Nebenbedingungen

Sei $f(x_1, \dots, x_n)$ eine Funktion in n Variablen, die unter einer Nebenbedingung (NB) optimiert werden soll. Die NB sei durch $\Phi(x_1, \dots, x_n) = 0$ gegeben, wobei Φ selbst eine Funktion in den n Variablen x_1, \dots, x_n ist (die allerdings nicht alle in Φ vorkommen müssen).



Man sieht, dass an einem Punkt, an dem f unter der NB $\Phi = 0$ maximal/minimal ist, die Gradienten von f und Φ parallel sein müssen.

Dies führt zu folgendem Verfahren (nach Lagrange) zum Auffinden möglicher Extremstellen von f unter der NB $\Phi = 0$:

Wir betrachten die Funktion

$$L_f(x_1, \dots, x_n, \lambda) = f(x_1, \dots, x_n) + \lambda \cdot \Phi(x_1, \dots, x_n)$$

in den $n + 1$ Variablen x_1, \dots, x_n, λ .

Wir nennen L_f die Lagrange-Funktion von f und λ den Lagrange-Multiplikator.

Wie bei der Optimierung ohne NB suchen wir jetzt die kritischen Punkte der Lagrange-Funktion, d.h. diejenigen (a, λ) mit $\nabla L_f(a, \lambda) = 0$.

Für diese Punkte gilt dann $\Phi(a) = 0$, d.h. die NB ist erfüllt, und $\nabla f(a) = -\lambda \nabla \Phi(a)$, d.h. die Gradienten sind parallel.

Ebenso gilt die Umkehrung, d.h. in Punkten, an denen die Gradienten parallel sind und die die NB erfüllen, ist der Gradient von L_f null.

Bemerkung

Wie im Fall einer Variablen oder im Fall ohne NB ist die Bedingung nicht hinreichend. Das heißt nicht jeder kritische Punkt der Lagrange-Funktion ist ein Maximum/Minimum. Anders als in diesen Fällen (zweite Ableitung, Hesse-Matrix) gibt es hier allerdings **kein** einfaches Kriterium, um die möglichen Extrempunkte genauer zu klassifizieren.

Beispiel

Berechne mögliche Extrema der Funktion $f(x, y) = y \cdot e^{(2x-1)}$ unter der NB $g(x, y) = 4$ mit $g(x, y) = 2x + y$.

Um die Lagrange-Methode anwenden zu können, sei $\Phi(x, y) = 2x + y - 4$. Die Lagrangefunktion ist dann $L_f(x, y, \lambda) = y \cdot e^{(2x-1)} + \lambda \cdot (2x + y - 4)$.

Die Bedingung $\nabla L_f(x, y, \lambda) = 0$ führt dann zu folgenden Gleichungen:

$$\frac{\partial L_f}{\partial x}(x, y, \lambda) = 2y \cdot e^{(2x-1)} + 2\lambda = 0 \quad (\text{I})$$

$$\frac{\partial L_f}{\partial y}(x, y, \lambda) = e^{(2x-1)} + \lambda = 0 \quad (\text{II})$$

$$\frac{\partial L_f}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = 2x + y - 4 = 0 \quad (\text{III})$$

Beispiel (Fortsetzung)

Gleichung (II) kann nach λ aufgelöst werden:

$$\begin{aligned}e^{(2x-1)} + \lambda &= 0 \\ \lambda &= -e^{(2x-1)}.\end{aligned}$$

In Gleichung (I) eingesetzt ergibt dies

$$\begin{aligned}2y \cdot e^{(2x-1)} - 2e^{(2x-1)} &= 0 \\ y \cdot e^{(2x-1)} - e^{(2x-1)} &= 0 \\ e^{(2x-1)} \cdot (y - 1) &= 0.\end{aligned}$$

Daraus folgt $y = 1$. (Satz vom Nullprodukt, und da e^a immer größer Null ist.)

Beispiel (Fortsetzung)

$y = 1$ in Gleichung (III) eingesetzt ergibt

$$2x + 1 - 4 = 0$$

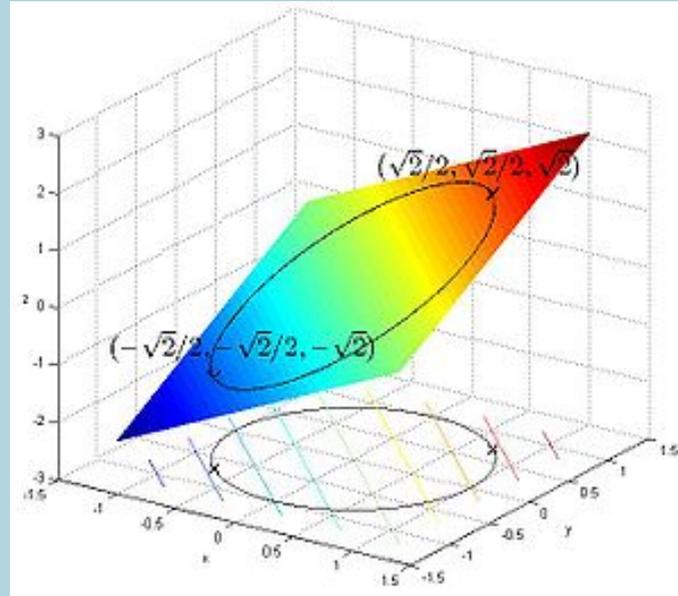
$$2x = 3$$

$$x = 1.5.$$

Also ist der Punkt $(1.5, 1)$ einzige mögliche Extremstelle der Funktion f unter der NB $g(x, y) = 4$.

Beispiel

Die Funktion $f(x, y) = x + y$ soll unter der NB $x^2 + y^2 = 1$ optimiert werden.



Beispiel (Fortsetzung)

Um die Lagrange-Methode anwenden zu können, sei $\Phi(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Die Lagrangefunktion ist dann $L_f(x, y, \lambda) = x + y + \lambda \cdot (x^2 + y^2 - 1)$. Die Bedingung $\nabla L_f = 0$ führt dann zu folgenden Gleichungen:

$$\frac{\partial L_f}{\partial x}(x, y, \lambda) = 1 + 2\lambda x = 0 \quad (\text{I})$$

$$\frac{\partial L_f}{\partial y}(x, y, \lambda) = 1 + 2\lambda y = 0 \quad (\text{II})$$

$$\frac{\partial L_f}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad (\text{III})$$

Beispiel (Fortsetzung)

Gleichung (I) kann nach λ aufgelöst werden:

$$1 + 2\lambda x = 0$$

$$2\lambda x = -1$$

$$\lambda = \frac{-1}{2x}.$$

In Gleichung (II) eingesetzt ergibt dies

$$1 + 2 \cdot \frac{-1}{2x} \cdot y = 0$$

$$1 - \frac{y}{x} = 0$$

$$1 = \frac{y}{x}$$

$$x = y.$$

Beispiel (Fortsetzung)

Wird das in (III) eingesetzt, erhält man

$$x^2 + x^2 - 1 = 0$$

$$2x^2 = 1$$

$$x^2 = 0.5$$

$$x = \pm\sqrt{0.5}.$$

Die kritischen Punkte berechnen sich damit zu $(\sqrt{0.5}, \sqrt{0.5})$ und $(-\sqrt{0.5}, -\sqrt{0.5})$.

Übung

Berechne die partiellen Ableitungen von

- $f(x, y, z) = x \cdot e^{2z} - 3xy$
- $f(x, y, z) = \sqrt{xy} - \frac{x}{z}$

Übung

Sei $f(x, y) = x^2 - 0.5y^2 + 4xy - 14x - y + 3$
Untersuche f auf kritische Punkte.

Übung

Berechne den Gradienten und die zweite Ableitungen von

$$f(x, y, z) = 3x - 4xz + 2y^2 + z \cdot e^y$$

Übung

Ein Unternehmen benötigt zur Herstellung eines Gutes x die beiden Faktoren A (Arbeitsstunden) und M (Maschinenstunde). Die Produktionsfunktion des Gutes x in Abhängigkeit der eingesetzten Arbeits- und Maschinenstunden lautet $P(A, M) = A \cdot M$ (wobei P die produzierten Einheiten von x darsellt). Das Unternehmen möchte 240 Einheiten des Gutes x herstellen. Jede Arbeitsstunde kostet 3 Euro und jede Maschinenstunde kostet 5 Euro. Bestimme mit dem Lagrange-Verfahren, welche Einsatzmenge von A und M optimal (am günstigsten) ist, um die gewünschten 240 Einheiten von Gut x zu produzieren.

7 Finanzmathematik

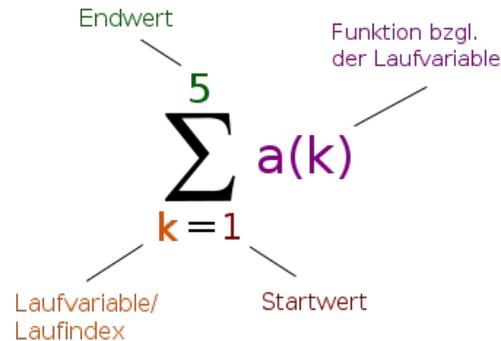
7.1 Einleitung

Im letzten Kapitel behandeln wir zwei wichtige Aspekte aus der Finanzmathematik: zum einen die Zinsrechnung und zum anderen die Investitionsrechnung. Zuerst betrachten wir aber ein dafür notwendiges wichtiges mathematisches Hilfsmittel – das Summenzeichen – sowie eine wichtige spezielle Summe und deren Verallgemeinerung – die geometrische Reihe.

Um die Schreibweise für bestimmte längere Summen zu vereinfachen und um Missverständnisse durch Auslassungspunkte zu vermeiden, wird in der Mathematik das Summenzeichen benutzt.

Definiton:

Das Summenzeichen besteht aus dem großen griechischen Buchstaben Σ (Sigma) gefolgt von einem Folgenglied, das durch einen zuvor nicht benutzten Index (hier k) bezeichnet wird. Dieser Index wird oft als Laufindex bzw. Laufvariable oder Summationsvariable bezeichnet. Meistens werden hierfür die Buchstaben i, j, k verwendet.



Es gilt:

$$\sum_{k=m}^n a_k = a_m + a_{m+1} + \dots + a_n.$$

Beispiel

- $\sum_{k=1}^5 k^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25$ (Summe der ersten fünf Quadratzahlen)
- $\sum_{k=3}^6 2k = 6 + 8 + 10 + 12$ (Summe der geraden Zahlen von 6 bis 12)
- $\sum_{i=1}^4 x^i = x + x^2 + x^3 + x^4$

Rechenregel

- $\sum_{k=n}^n a_k = a_n$
- falls $m > n$, dann gilt $\sum_{k=m}^n a_k = 0$ (leere Summe)
- $\sum_{k=m}^n 1 = n - m + 1$
- $\sum_{k=m}^n a_k + \sum_{k=n+1}^r a_k = \sum_{k=m}^r a_k$

Viele spezielle Summen (beginnend mit $k = 0$ oder $k = 1$) kann man leicht ausrechnen und ihr Wert ist daher (in Abhängigkeit des Endwertes) bekannt. Als bekanntes Beispiel dient hier die Summe der ersten N Zahlen. Es gilt:

$$\sum_{k=1}^N k = 1 + 2 + \dots + N = \frac{(N + 1) \cdot N}{2}.$$

Aufgrund ihres häufigen Auftretens in finanzmathematischen Rechnungen interessieren wir uns speziell für den Wert der Summe $\sum_{k=0}^n a^k$ für einen festen Wert $a \in \mathbb{R}$. Es gilt:

$$\sum_{k=0}^n a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} \text{ (geometrische Summenformel).}$$

Herleitung:

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=0}^n a^k\right) \cdot (1 - a) &= (1 + a + a^2 + \dots + a^n) \cdot (1 - a) \\ &= 1 + a + a^2 + \dots + a^n - a - a^2 - \dots - a^{n+1} \\ &= 1 + a - a + a^2 - a^2 + \dots + a^n - a^n - a^{n-1} \\ &= 1 - a^{n-1}\end{aligned}$$

Teilt man nun beide Seiten durch $(1 - a)$ erhält man das gewünschte Ergebnis.

Die unendliche Summe $\sum_{k=0}^{\infty} a^k$ nennt man geometrische Reihe.

Ist a größer als 1, so divergiert die Reihe, das heißt, der Wert der Reihe wird unendlich groß.

Gilt allerdings $0 < a < 1$, erreicht die geometrische Reihe einen festen Wert. Das bedeutet, dass der Grenzwert für $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N a^k$ existiert.

Es gilt dann:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N a^k = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1 - a^{N+1}}{1 - a} = \frac{1}{1 - a}.$$

Bemerkung

$$\sum_{k=1}^n a^k = \sum_{k=0}^n a^k - a^0 = \sum_{k=0}^n a^k - 1 = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} - 1$$

für $0 < a < 1$ gilt:
$$\sum_{k=1}^{\infty} a^k = \frac{1}{1 - a} - 1 = \frac{a}{1 - a}$$

Bezeichnungen:

K_0	Anfangskapital, Barwert
n	Laufzeit, Anzahl der Anlageperioden
K_t	Kapital nach t Anlageperioden
K_n	Endkapital, Kapital nach n Anlageperioden
p	Zinsfuß (in Prozent) Bsp: bei einem Zins von 6% ist $p = 6$
i	Zinssatz (Dezimal) $i = p/100$
$q = 1 + i$	Aufzinsungsfaktor
Z_n	Zinsen (am Ende der Laufzeit)
Zinszuschlagstermin	Zeitpunkt, an dem Zinsen fällig werden
Zinsperiode	Zeitraum zwischen zwei Zinszuschlagsterminen

Lineare (einfache) Verzinsung:

Man spricht von linearer oder einfacher Verzinsung, wenn die Zinsen am Ende der Laufzeit zugeschlagen werden und innerhalb der Laufzeit keine weiteren Zinszuschlagstermine liegen. Zinsen aus früheren Anlageperioden werden somit nicht mitverzinst. Die Zinsen werden zeitanteilig berechnet. Die einfache Verzinsung wird durch die folgende Formel beschrieben:

$$\text{Endkapital: } K_n = K_0 + Z_n = K_0 \left(1 + n \frac{p}{100}\right) = K_0(1 + ni)$$

Bemerkung

- Laufzeit und Zinssatz müssen sich auf die gleiche Zeiteinheit beziehen!
- Die Angabe des Zinssatzes bezieht sich – wenn nichts anderes angegeben – auf ein Jahr (lat.: per anno, p.a.).
- Die Berechnung des Endkapitals (Anfangskapitals) nennt man auch Aufzinsen (Abzinsen).
- Die einfache Verzinsung kommt in der Praxis in der Regel nur bei Laufzeiten vor, die kürzer als ein Jahr sind.

Exponentielle Verzinsung:

Man spricht von exponentieller Verzinsung oder von Zinseszinsen, wenn innerhalb der Laufzeit mehrere Zinszuschlagstermine liegen und die Zinsen jeweils dem Kapital zugeschlagen und weiter mitverzinst werden. Hier tritt der Zinseszinseffekt auf.

Der Zinsenzinsvorgang wird insbesondere dann besonders einfach, wenn man die Zinsperiode als Zeiteinheit wählt.

Folgende Formel beschreibt die Zinsenzinsrechnung:

$$\text{Kapital nach } t \text{ Zinsperioden: } K_t = K_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^t = K_0(1 + i)^t = K_0 q^t$$

Gemischte Verzinsung:

Umfasst die Laufzeit sowohl ganze Jahre als auch am Anfang und/oder am Ende noch Teile eines Jahres, so spricht man von gemischter Verzinsung, bei der beide Verzinsungsmodelle benutzt werden.

In der Praxis (z.B. bei Sparbüchern) wird häufig diese Mischung aus einfacher und exponentieller Verzinsung verwendet.

$$\text{Endkapital: } K_n = K_0(1 + t_1i)(1 + i)^N(1 + t_2i)$$

wobei sich die Laufzeit ergibt als $n = t_1 + N + t_2$ mit

t_1 : Jahresanteil bis zum ersten Jahresende

N : Anzahl der ganzen Jahre

t_2 : Jahresanteil im letzten Jahr bis zum Ende der Laufzeit

Beispiel

1000 Euro werden am 01.07.2012 mit einem Zins von 3% p.a bis zum 31.03.2015 angelegt. Wie viel Kapital ist am Ende der Anlagedauer vorhanden?

$$K_n = 1000(1 + 0.5 \cdot 0.03)(1.03)^2(1 + 0.25 \cdot 0.03) = 1084.89 \text{ Euro}$$

Unterjährige Verzinsung:

Bisher sind wir immer davon ausgegangen, dass die Zinsen immer zum Jahresende anfallen. In der Praxis (vor allem bei Tagesgeldkonten) tritt allerdings häufig der Fall ein, dass der Zinszuschlag in kürzeren Abständen erfolgt (z.B. monatlich oder vierteljährlich). In diesem Fall spricht man von unterjähriger Verzinsung.

Ist i der (nominelle) Zinssatz pro Jahr und m die Anzahl der Zinsperioden pro Jahr, dann berechnet sich das Kapital $K(t)$ nach t Jahren nach folgender Formel:

$$\text{Endkapital: } K_t = K_0 \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mt}$$

Beispiel

Anlage 1000 Euro, 6% Zinsen p.a., Laufzeit 6 Jahre

Wie hoch ist das Endkapital, wenn der Zinszuschlag (a) jährlich, (b) vierteljährlich, (c) monatlich oder (d) täglich erfolgt?

Lösung:

- (a) jährliche Verzinsung: $K_6 = K_0 \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mt} = 1000 \left(1 + \frac{0.06}{1}\right)^6 = 1418,52$
- (b) vierteljährliche Verzinsung: $K_6 = K_0 \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mt} = 1000 \left(1 + \frac{0.06}{4}\right)^{24} = 1429,50$
- (c) monatliche Verzinsung: $K_6 = K_0 \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mt} = 1000 \left(1 + \frac{0.06}{12}\right)^{72} = 1432,04$
- (d) tägliche Verzinsung: $K_6 = K_0 \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mt} = 1000 \left(1 + \frac{0.06}{365}\right)^{2190} = 1433,29$

Es stellt sich die Frage, was bei noch kleineren Zinsperioden (Minute, Sekunde,...) passiert. Was ist das größtmögliche Kapital, das bei einem Zinssatz i bei minimalen Zinsperioden (unendlich klein) nach t Jahren zur Verfügung steht?

Bei unendlich kleinen Zinsperioden wird die Anzahl m der Zinsperioden pro Jahr unendlich groß. Es gilt dann:

$$K_t = \lim_{m \rightarrow \infty} K_0 \left(1 + \frac{i}{m} \right)^{mt} .$$

An dieser Stelle hilft uns folgende, in der Mathematik sehr bedeutende Gleichung:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{N}\right)^N = e^x.$$

In unserm Fall gilt also für das Kapital nach t Jahren bei unendlich vielen Zinsperioden pro Jahr:

$$K_t = K_0 \cdot e^{it}.$$

In unserem vorigen Beispiel gilt also für das maximal erreichbare Kapital nach 6 Jahren zu 6% Zins p.a. bei unendlich kleinen Zinsperioden pro Jahr

$$K_6 = 1000 \cdot e^{0.06 \cdot 6} = 1000 \cdot e^{0.36} = 1433,32 \text{ Euro.}$$

Die Standardverzinsung, die bei den meisten gängigen Anlageformen vorkommt, ist die exponentielle Verzinsung mit jährlichem Zinszuschlag. Die Formel für das Kapital nach t Jahren bei festem Zinssatz i (p.a.) lautet $K_t = K_0(1 + i)^t$.

Da die Fragestellung auch lauten kann, wie hoch der Zinssatz sein muss, um bei einer bestimmten Anlagedauer ein gewünschtes Kapital zu erreichen, oder wie lange man das Kapital zum Zinssatz i anlegen muss, um ein gewünschtes Endkapital zu erreichen, ist es wichtig, dass man obige Formel auch nach den anderen Variablen umstellen kann.

Für den Zinssatz i gilt zum Beispiel:

$$i = \sqrt[t]{\frac{K_t}{K_0}} - 1.$$

Bemerkung

Es gilt $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$.

Wir wollen die Formel nun nach t umstellen.

$$K_t = K_0(1 + i)^t$$

$$\frac{K_t}{K_0} = (1 + i)^t.$$

An dieser Stelle benötigt man den (natürlichen) Logarithmus \ln , der immer dann ins Spiel kommt, wenn die gesuchte Variable als Exponent (Hochzahl) auftritt. Zusammen mit dem

$$\boxed{3. \text{ Logarithmusgesetz } \ln a^b = b \cdot \ln a}$$

kann man die gewünschte Variable dann isolieren:

$$\ln \frac{K_t}{K_0} = \ln (1 + i)^t = t \cdot \ln (1 + i) \quad \implies \quad t = \frac{\ln \frac{K_t}{K_0}}{\ln (1 + i)}.$$

Beispiel (Verdopplungszeit)

Will man wissen, nach welcher Zeit sich das angelegte Kapital verdoppelt hat, setzt man $K_t = 2 \cdot K_0$. In die obige Formel eingesetzt ergibt das dann

$$t_{\text{Verd.}} = \frac{\ln 2}{\ln(1 + i)}.$$

Diese Zeit nennt man Verdopplungszeit. Wie man sieht, ist sie unabhängig vom Startkapital.

Regelmäßige Einzahlungen:

Auf ein Sparbuch, das mit 3% p.a. verzinst wird, werden 5 Jahre lang, jährlich am 01.01. eines Jahres 600 Euro eingezahlt. Wie viel Geld ist nach 5 Jahren vorhanden?

Die ersten 600 Euro werden komplett über 5 Jahre verzinst. Man überlegt sich, dass das Geld, das nach m Anlagejahren eingezahlt wird (also zu Beginn des $(m + 1)$ -ten Jahres), noch $5 - m$ Jahre verzinst wird. Die letzten 600 Euro werden somit noch 1 Jahr verzinst (alles inklusive Zinseszinsen).

Es gilt deshalb:

$$\begin{aligned} K_5 &= 600 \cdot 1.03^5 + 600 \cdot 1.03^4 + \dots + 600 \cdot 1.03 \\ &= \sum_{k=1}^5 600 \cdot 1.03^k = 600 \cdot \sum_{k=1}^5 1.03^k \\ &= 600 \cdot \left(\frac{1 - 1.03^6}{1 - 1.03} - 1 \right) = 3281,05 \text{ Euro.} \end{aligned}$$

Das Kapital K_t eines Sparbuchs mit Zinssatz i p.a. und jährlicher Einzahlung des Betrages B (zu Beginn des Jahres) berechnet sich zum Zeitpunkt t (in Jahren) allgemein nach folgender Formel:

$$K_t = B \cdot \sum_{k=1}^t (1 + i)^k.$$

Bemerkung

Wird das Geld erst am Ende eines Jahres eingezahlt, startet die Summe bei $k = 0$ und endet bei $k = t - 1$.

Zum Vergleich schauen wir uns an, wie sich das Kapital entwickelt, wenn auf dasselbe Sparbuch anstatt jedes Jahr 600 Euro jeden Monat 50 Euro eingezahlt werden (am Anfang des Monats), wobei wir zur Vereinfachung annehmen, dass die Zinsen monatlich gutgeschrieben werden, da auch jeden Monat Geld eingezahlt wird. Der Zinsfaktor für jeden Euro Kapital beträgt nun $(1 + \frac{0.03}{12})$ für jeden Monat, in dem das Geld auf dem Konto liegt. Die ersten 50 Euro werden also 60 Monate verzinst, die 50 Euro die am 01.01. des zweiten Jahres eingezahlt werden, nur noch 48 Monate usw.. Die letzten 50 Euro werden nur noch 1 Monat verzinst.

Analog zu oben gilt dann (mit t in Monaten)

$$K_{60} = 50 \cdot \sum_{k=1}^{60} \left(1 + \frac{0.03}{12}\right)^k = 50 \cdot \left(\frac{1 - \left(1 + \frac{0.03}{12}\right)^{61}}{1 - \left(1 + \frac{0.03}{12}\right)} - 1\right) = 3240,42 \text{ Euro.}$$

7.3 Investitionsrechnung

Das Entscheidende an der Investitionsrechnung ist die Tatsache, dass eine Zahlung Z , die ich in t Jahren erhalten werde, zum aktuell gegenwärtigen Zeitpunkt nicht den Wert Z hat, sondern nur denjenigen Wert K_0 , den ich zum aktuellen Zinssatz i (p.a.) anlegen müsste, um in t Jahren (konstanter Zinssatz über den gesamten Zeitraum angenommen) das Kapital $K_t = Z$ zu bekommen.

Dieser Wert K_0 wird **Barwert** genannt.

Der Barwert K_0 einer Zahlung Z in t Jahren berechnet sich bei einem Zinssatz i (p.a.) nach folgender Formel:

$$K_0 = \frac{Z}{(1+i)^t}.$$

Bemerkung

In Zukunft schreiben wir meistens q anstatt $1+i$.

Definition:

Angenommen es gilt ein auch in Zukunft konstanter Zinssatz von i (p.a.) und somit der Zinsfaktor q .

Eine Investition die der Zukunft zu den Zeitpunkten t_1, t_2, \dots, t_n (in Jahren) zu Auszahlungen Z_1, Z_2, \dots, Z_n führt hat den Kapitalwert (auch Nettobarwert)

$$KW = \frac{Z_1}{q^{t_1}} + \frac{Z_2}{q^{t_2}} + \dots + \frac{Z_n}{q^{t_n}}.$$

Der Nettobarwert einer Investition ist also die Summe der Barwerte der einzelnen Auszahlungen.

Eine Investition, die zum gegenwärtigen Zeitpunkt Ausgaben C verursacht, ist lohnenswert, wenn für ihren Kapitalwert (Nettobarwert) KW gilt, dass er höher ist als die Ausgaben C , also wenn $KW > C$ gilt.

Beispiel

Eine Firma überlegt 100 Euro in eine neue Technologie, die erst langfristig Vorteile bringt, zu investieren. Die neue Technologie würde in 3 Jahren zu 50 Euro mehr Gewinn führen und in 5 Jahren dann zu sogar 70 Euro mehr Gewinn. Lohnt sich die Investition, wenn der Zins 2% p.a. beträgt?

$$KW = \frac{50}{1.02^3} + \frac{70}{1.02^5} = 47,12 + 63,40 = 110,52 > 100.$$

Beispiel

Eine Anlagefirma wirbt mit folgendem Angebot: Für eine einmalige Anlage von 1000 Euro erhält man die nächsten 6 Jahre jeweils 180 Euro. Der aktuelle (und auch zukünftig angenommene) Zins beträgt 4% p.a. Lohnt sich diese Anlageform? (Wobei die Zahlungen natürlich erst in einem Jahr beginnen.)

$$KW = \frac{180}{1.04} + \frac{180}{1.04^2} + \dots + \frac{180}{1.04^6} = \sum_{k=1}^6 \frac{180}{1.04^k} = 180 \cdot \sum_{k=1}^6 \frac{1}{1.04^k} = 180 \cdot \sum_{k=1}^6 \left(\frac{1}{1.04} \right)^k.$$

Daraus ergibt sich

$$KW = 180 \cdot \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{1.04} \right)^7}{1 - \frac{1}{1.04}} - 1 \right) = 180 \cdot 5.242 = 943,56 < 1000.$$

Beispiel

Eine Staatsanleihe (mit Nennwert 200 Euro) kostet 220 Euro. Die Anleihe ist so ausgelegt, dass ich in einem Jahr 25 Euro Dividende bekommen würde, und in 2 Jahren, wenn die Anleihe abläuft, würde ich ihren Nennwert (also 200 Euro) plus eine erneute Dividende von 25 Euro bekommen. Bei welchen Zinssätzen i würde sich der Kauf der Staatsanleihe lohnen? Wir suchen nach dem Zinssatz i , bei dem der Kapitalwert der Staatsanleihe genau die 220 Euro betragen würde, die die Anleihe kostet. Bei allen höheren Zinssätzen würde man Verlust machen, bei niedrigeren Gewinn.

Wir suchen nicht nach dem Zinssatz i sondern dem Zinsfaktor q , da dies praktischer zum Rechnen ist.

Beispiel (Fortsetzung)

$$KW = \frac{25}{q} + \frac{225}{q^2} = 220$$

$$25q + 225 = 220q^2$$

$$-220q^2 + 25q + 225 = 0$$

Mitternachtsformel liefert: $q_1 = -\dots$, $q_2 = 1.0697$

Da der Zinsfaktor positiv ist, ist nur q_2 sinnvoll.

Der gesuchte Zinsfaktor ist 1.0697. Somit ist der gesuchte Zinssatz ($i = q - 1$) $i = 0.0697$.
Der Kauf der Anleihe lohnt sich nur, wenn der aktuelle Zins unter 6.97% liegt.

Übung

Wie viel Geld muss man bei einem Zins von 3% p.a. anlegen, wenn man nach 10 Jahren 5000 Euro haben will?

Übung

Berechne den Wert K_5 aus dem Beispiel von Seite 200, wenn das Geld am Ende eines Jahres (also am 31.12.) eingezahlt wird, und vergleiche das Ergebnis mit dem von Seite 200 und dem Beispiel von Seite 202. Ist das Ergebnis plausibel?

Übung

Eine Firma kann für 500 Euro eine Investition tätigen, die in Zukunft jedes Jahr 20 Euro einbringen würde (Beginn der Zuzahlungen in einem Jahr, die Zuzahlungen enden nie). Vergleiche den Kapitalwert der Investition bei einem Zinssatz $i_1 = 0,02$ mit dem Kapitalwert bei einem Zinssatz $i_2 = 0,05$. Berechne denjenigen Zinssatz i , sodass der Kapitalwert genau den Kosten der Investition entspricht.