Zusatzübung zu linearen Gleichungssystemen

Eine Firma stellt drei Arten von Regalen her. Die dafür benötigten Materialien können der folgenden Tabelle entnommen werden:

	Bretterstapel	Schraubensätze	Leistenpackungen
Regaltyp A	3	2	2
Regaltyp B	18	16	14
Regaltyp C	3	4	3

Die Firma hat noch 78 Bretterstapel, 76 Schraubensätze und 64 Leistenpackungen auf Lager und will das Lager vor den Betriebsferien komplett räumen. Besteht durch Produktion der drei Regaltypen dazu die Möglichkeit? Wenn ja, wie sieht die Produktion aus und wie viele Regale vom Typ C können maximal/minimal produziert werden?

Bemerkung:
Diese Lösung ist zum optimalen Verständnis und zum guten Nachvollziehen recht ausführlich, mit viel Text und Erklärungen. Im Falle einer Lösung für die Klausur müssen einzelne Schritte natürlich nicht erläutert werden, es genügen die Gleichungen und Rechnungen.

Lösung Bezeichne mit x die Anzahl der produzierten Regale vom Typ A, mit y die Anzahl der produzierten Regale vom Typ B und mit z die Anzahl der produzierten Regale vom Typ C. Durch die Forderung das Lager komplett zu Räumen ergeben sich die folgenden Bedingungen:

$$\begin{array}{rcrcrcrr} 3x & + & 18y & + & 3z & = & 78 & \text{(Bretterstapel)} \\ 2x & + & 16y & + & 4z & = & 76 & \text{(Schraubensätze)} \\ 2x & + & 14y & + & 3z & = & 64 & \text{(Leistenpackungen)} \end{array}$$

oder in Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} 3 & 18 & 3 \\ 2 & 16 & 4 \\ 2 & 14 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 78 \\ 76 \\ 64 \end{pmatrix}$$

Löse das lineare Gleichungssystem mit dem Gaussverfahren:

$$\begin{array}{ccccccccl}
3x & + & 18y & + & 3z & = & 78 & & (I)\\
2x & + & 16y & + & 4z & = & 76 & & (II)\\
2x & + & 14y & + & 3z & = & 64 & & (III)\\
\hline
x & + & 6y & + & z & = & 26 & & \frac{1}{3}\cdot(I)\\
2x & + & 16y & + & 4z & = & 76 & & \\
0 & + & -2y & + & -z & = & -12 & & (III)-(II)\\
\hline
x & + & 6y & + & z & = & 26 & & \\
0 & + & 4y & + & 2z & = & 24 & & (II)-2\cdot(I)\\
0 & + & -2y & + & -z & = & -12 & & \\
\hline
x & + & 6y & + & z & = & 26 & & \\
0 & + & 4y & + & 2z & = & 24 & & \\
0 & + & 0 & + & 0 & = & 0 & & 2\cdot(III)+(II)\\
\hline
x & + & 6y & + & z & = & 26 & & \\
0 & + & y & + & \frac{1}{2}z & = & 6 & & \frac{1}{4}\cdot(II)\\
0 & + & 0 & + & 0 & = & 0 & & \\
\hline
x & + & 0 & + & -2z & = & -10 & & (I)-6\cdot(II)\\
0 & + & y & + & \frac{1}{2}z & = & 6 & & \\
0 & + & 0 & + & 0 & = & 0 & &
\end{array}$$

Das Gleichungssystem ist also unterbestimmt und somit lösbar. Setze $z=t$. Es folgen die Beziehungen

$$\begin{aligned} x-2t &= -10\\ y+\tfrac{1}{2}t &= 6 \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} x &= -10+2t\\ y &= 6-\tfrac{1}{2}t. \end{aligned}$$

Also ist für jedes $t\in\mathbb{R}$

$$x=-10+2t,\quad y=6-\tfrac{1}{2}t,\quad z=t$$

eine Lösung des linearen Gleichungssystems. Allerdings sind für unser Anwendungsszenario nur Lösungen sinnvoll in denen x,y,z ganzzahlig sind und $x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0$ erfüllen. Aus $y=6-\frac{1}{2}t$ folgt daher, dass t stets durch 2 teilbar sein muss. Aus $0\geq x=-10+2t$ folgt $5\leq t$ und aus $0\leq y=6-\frac{1}{2}t$ folgt $t\leq 12$. Somit sind alle für uns sinnvollen Lösungen gegeben durch

$$t_1=6,\quad t_2=8,\quad t_3=10,\quad t_4=12.$$

Die Firma hat also die Möglichkeit das Lager vor den Betriebsferien komplett zu räumen. Dazu hat sie genau 4 Möglichkeiten die verschiedenen Regaltypen herzustellen:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2, & y_1 &= 3, & z_1 &= 6 \\ x_2 &= 6, & y_2 &= 2, & z_2 &= 8 \\ x_3 &= 10, & y_3 &= 1, & z_3 &= 10 \\ x_4 &= 14, & y_4 &= 0, & z_4 &= 12. \end{aligned}$$

Maximal können 12 Regale vom Typ C hergestellt werden; minimal 6 Regale.

Anmerkung In der ursprünglichen Aufgabenstellung mit nur 40 Leistenpackungen ist das entsprechende lineare Gleichungssystem nicht lösbar.