Lösung zu Seite 85

Übung:

Sei $f(x) = \begin{cases} \frac{10-x^2}{x+1}, & \text{für } x < 2 \\ \sqrt{2}\sqrt{x}, & \text{für } x \geq 2 \end{cases}$. Prüfe f auf Stetigkeit.

Lösung: Bemerke zunächst $D_f = \{x \in \mathbb{R} | x \neq -1\}$. Die Stetigkeit von f ist an allen Stellen im Definitionsbereich klar, außer bei $x = 2$. Berechne also $\lim_{x\to 2} f(x)$.
Linksseitiger Grenzwert $\lim_{x\nearrow 2} f(x)$: wir nähern 2 von unten durch $x_1 = 1.9, x_2 = 1.99$ und $x_3 = 1.999$ an. Es gelten $f(x_1) = 2.2, f(x_2) = 2.02$ und $f(x_3) = 2.002$, womit $\lim_{x\nearrow 2} f(x) = 2$ folgt.
Rechtsseitiger Grenzwert $\lim_{x\searrow 2} f(x)$: wir nähern 2 von oben durch $x_1 = 2.1, x_2 = 2.01$ und $x_3 = 2.001$ an. Es gelten $f(x_1) = 2.04, f(x_2) = 2.004$ und $f(x_3) = 2.0005$, womit $\lim_{x\searrow 2} f(x) = 2$ folgt.
Der links- und rechtsseitige Grenzwert stimmen somit überein, also

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 2 = \sqrt{2}\sqrt{2} = f(2).$$

Damit ist f auch stetig in $x = 2$.