Lösungen zu den Folien 129, 130

Übung 2:
Berechne alle Hoch- und Tiefpunkte der Funktion $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - 1.5x^2 + 2$.
Lösung:
Die Funktion hat einen Hochpunkt, nämlich bei $(0,2)$ und zwei Tiefpunkte, einen bei $(3, -\frac{37}{4})$ und einen bei $(-1, \frac{17}{12})$.
Es gelten

$$f'(x) = x^3 - 2x^2 - 3x,$$
$$f'' = 3x^2 - 4x - 3.$$

Übung 4:
Die Funktion $f(x) = e^{0.1x-6} \cdot (x^2 - 12x + 36) + 5$ beschreibt den Wassergehalt eines Stausees innerhalb eines Tages (x in Stunden, $0 \leq x \leq 24$). Zu welchem Zeitpunkt hat der See am wenigsten Wasser? Wie viel Wasser enthält er zu diesem Zeitpunkt? Zu welchem Zeitpunkt hat der See den größten Abfluss?
Lösung:
Zu welchem Zeitpunkt hat der See am wenigsten Wasser? Wie viel Wasser enthält er zu diesem Zeitpunkt? Gefragt ist nach einem Tiefpunkt der Funktion f. Der Stausee hat nach 6 Stunden am wenigsten Wasser, nämlich ein Wassergehalt von 5 (der TP ist also $\big(6, \quad 5\big)$).
Zu welchem Zeitpunkt hat der See den größten Abfluss? Gefragt ist nach dem Minimum der Ableitung von f. Diese hat einen Tiefpunkt zum Zeitpunkt $10\sqrt{2} - 14$.
Es gelten

$$f'(x) = \tfrac{1}{10}e^{0.1x-6}(x^2 + 8x - 84),$$
$$f''(x) = \tfrac{1}{100}e^{0.1x-6}(x^2 + 28x - 4),$$
$$f'''(x) = \tfrac{1}{1000}e^{0.1x-6}(x^2 + 48x - 276).$$

Übung 5:
Eine Funktion f hat folgende allgemeine Funktionsgleichung: $f(x) = ax^2 + bx + c$. Wir wissen, dass $f(2) = 4$ gilt, und dass f bei $(1.5, 4.25)$ einen Hochpunkt besitzt. Bestimme aus diesen Informationen die genaue Funktionsgleichung von f.
Lösung:
Aus der Aufgabenstellung leiten sich die Bedingungen $f(2) = 4, f(1.5) = 4.25$ und $f'(1.5) = 0$ ab. Dies führt zum LGS

$$\begin{array}{ccccc} f(2) & = & 4a + 2b + c & = & 4 \\ f(1.5) & = & 2.25a + 1.5b + c & = & 4.25 \\ f'(1.5) & = & 3a + b & = & 0 \end{array} .$$

Dieses LGS hat die Lösung $a = -1, b = 3, c = 2$. Die gesuchte Funktionsgleichung lautet also $f(x) = -x^2 + 3x + 2$.

Übung 6:
An welchen Punkten in $\mathbb{R}$ ist die Funktion $f(x) = |x|$ differenzierbar? Was ist die Ableitung in diesen Punkten?
Lösung:
Die Funktion f ist in allen Punkten außer $x = 0$ differenzierbar, denn dort existiert der Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

nicht (d.h. links- und rechtsseitiger Grenzwert stimmen nicht überein). Es gelten nämlich

$$\lim_{h \nearrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = -1$$

und

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = 1.$$