Zusatzübung zu linearen Gleichungssystemen. *Eine Firma stellt drei Arten von Regalen her. Die dafür benötigten Materialien können der folgenden Tabelle entnommen werden:*

	Bretterstapel	*Schraubensätze*	*Leistenpackungen*
Regaltyp A	2	3	2
Regaltyp B	8	3	1
Regaltyp C	4	6	1

Die Firma hat noch 188 *Bretterstapel,* 147 *Schraubensätze und* 47 *Leistenpackungen auf Lager und will das Lager vor den Betriebsferien komplett räumen. Besteht durch Produktion der drei Regaltypen dazu die Möglichkeit? Wenn ja, wie sieht die Produktion aus?*

Lösung: Bezeichne mit x die Anzahl der produzierten Regale vom Typ A, mit y die Anzahl der produzierten Regale vom Typ B und mit z die Anzahl der produzierten Regale vom Typ C. Durch die Forderung das Lager komplett zu Räumen ergeben sich die folgenden Bedingungen:

$$\begin{array}{ccccccccr} 2x & + & 8y & + & 4z & = & 188 & & \text{(Bretterstapel)} \\ 3x & + & 3y & + & 6z & = & 147 & & \text{(Schraubensätze)} \\ 2x & + & 1y & + & 1z & = & 47 & & \text{(Leistenpackungen)} \end{array}$$

oder in Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 3 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 188 \\ 147 \\ 47 \end{pmatrix}.$$

Die Lösbarkeit des Gleichungssystems kann mit Hilfe des Determinantenkriteriums entschieden werden. Berechne dazu die Determinante der Koeffizientenmatrix:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 3 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} &= 2 \cdot 3 \cdot 1 + 8 \cdot 6 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \cdot 1 - 2 \cdot 3 \cdot 4 - 1 \cdot 6 \cdot 2 - 1 \cdot 3 \cdot 8 \\ &= 6 + 96 + 12 - 24 - 12 - 24 \\ &= 54 \neq 0 \end{aligned}$$

Da die Determinante der Koeffizientenmatrix ungleich 0 ist, ist das LGS eindeutig lösbar. Berechne nun die Lösung mit dem Gaussverfahren:

$$
\begin{array}{rcrcrcrl}
2x & + & 8y & + & 4z & = & 188 & (I) \\
3x & + & 3y & + & 6z & = & 147 & (II) \\
2x & + & y & + & z & = & 47 & (III) \\
\hline
x & + & 4y & + & 2z & = & 94 & \frac{1}{2}\cdot(I) \\
3x & + & 3y & + & 6z & = & 147 & \\
2x & + & y & + & z & = & 47 & \\
\hline
x & + & 4y & + & 2z & = & 94 & \\
0 & - & 9y & + & 0 & = & -135 & (II)-3\cdot(I) \\
0 & - & 7y & - & 3z & = & -141 & (III)-2\cdot(I) \\
\hline
x & + & 4y & + & 2z & = & 94 & \\
0 & + & y & + & 0 & = & 15 & -\frac{1}{9}\cdot(II) \\
0 & - & 7y & - & 3z & = & -141 & \\
\hline
x & + & 4y & + & 2z & = & 94 & \\
0 & + & y & + & 0 & = & 15 & \\
0 & + & 0 & - & 3z & = & -36 & (III)+7\cdot(II) \\
\hline
x & + & 4y & + & 2z & = & 94 & \\
0 & + & y & + & 0 & = & 15 & \\
0 & + & 0 & + & z & = & 12 & -\frac{1}{3}\cdot(III) \\
\hline
x & + & 4y & + & 0 & = & 70 & (I)-2\cdot(III) \\
0 & + & y & + & 0 & = & 15 & \\
0 & + & 0 & + & z & = & 12 & \\
\hline
x & + & 0 & + & 0 & = & 10 & (I)-4\cdot(II) \\
0 & + & y & + & 0 & = & 15 & \\
0 & + & 0 & + & z & = & 12 &
\end{array}
$$

Die Lösung des linearen Gleichungssystems ist damit $x = 10, y = 15, z = 12$, d.h. um das Lager komplett zu räumen, müssen 10 Regale vom Typ A, 15 Regale vom Typ B und 12 Regale vom Typ C produziert werden.

Alternatives Lösen des linearen Gleichungssystems in Matrixschreibweise:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 8 & 4 & 188 \\ 3 & 3 & 6 & 147 \\ 2 & 1 & 1 & 47 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 94 \\ 3 & 3 & 6 & 147 \\ 2 & 1 & 1 & 47 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \frac{1}{2} \cdot (I) \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 94 \\ 0 & -9 & 0 & -135 \\ 0 & -7 & -3 & -141 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ (II) - 3 \cdot (I) \\ (III) - 2 \cdot (I) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 94 \\ 0 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & -7 & -3 & -141 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ -\frac{1}{9} \cdot (II) \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 94 \\ 0 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & -3 & -36 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ \\ (III) + 7 \cdot (II) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 94 \\ 0 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 12 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ \\ -\frac{1}{3} \cdot (III) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & 70 \\ 0 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 12 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} (I) - 2 \cdot (III) \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 12 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} (I) - 4 \cdot (II) \\ \\ \\ \end{array}$$