Zusatzübungen 2

(Lösungen am Ende)

Aufgabe 1:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Berechne $A \cdot v$ und $\det(A)$.

Aufgabe 2:

Löse folgendes LGS:

$$\begin{array}{ccccccc} 3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & -1 \\ -x_1 & + & 2x_2 & + & -x_3 & = & 3 \end{array}$$

Aufgabe 3:

Bestimme den Definitions- und den Wertebereich der Funktion $f(x) = e^x + 5$. Berechne $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ und $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

Aufgabe 4:

Sei $f(x)$ eine quadratische Funktion (d.h. $f(x) = a^2 + bx + c$). Wir wissen, dass $f(1) = 4, f(-1) = 2$ und $f(2) = 9$. Bestimme die genaue Funktionsgleichung von f.

Aufgabe 5:

Bestimme alle Hoch- und Tiefpunkte der Funktion $f(x) = x^3 + 2.5x^2 - 2x - 1.5$.

Aufgabe 6:

Leite $f(x) = \sin(x^3) \cdot x^2$ und $g(x) = \frac{x-1}{e^{2x}}$ ab.

Aufgabe 7:

Vereinfache $g'(x)$ aus Aufgabe 6 soweit wie möglich.

Aufgabe 8:

Berechne $\int_1^e \frac{1}{x} \mathrm{d}x$.

Aufgabe 9:

Berechne den Gradient und die Hesse-Matrix von $f(x,y,z) = -xy + z \cdot e^x + \frac{y}{z^3}$.

Aufgabe 10:

Ein Anleger legt 2500 Euro zu einem Zinssatz von 4% über 5 Jahre an. Die Zinsen werden dabei vierteljährig zugeschlagen. Wie viel Geld hat der Anleger nach 5 Jahren.

Aufgabe 11:
Klausuraufgabe Wirtschaftsmathematik Kurs WMS 16 A:

a) Ein Anleger legt 4000 Euro auf einem einem Konto mit 1,5% Zinsen p.a. an. Welchen Betrag hat er nach 4 Jahren? Bei welchem Zinssatz hätte er nach 4 Jahren schon 5000 Euro?
b) Auf einem Tagesgeldkonto werden 5000 Euro zu einem festen Zins von 1% p.a. angelegt, wobei die Zinsen monatlich gutgeschrieben und danach mitverzinst werden. Welcher Betrag ist nach 2 Jahren auf dem Sparbuch?
c) Angenommen wir haben einen auch in der Zukunft festen Zinssatz von 2% p.a. Welchen Kapitalwert (Barwert) hat dann eine Investition, die in 3 Jahren eine Auszahlung von 1000 Euro, in 5 Jahren eine Auszahlung von 2000 Euro, und in 10 Jahren eine Auszahlung von 3000 Euro einbringt? Würden Sie als Unternehmer solch eine Investition tätigen, wenn diese zum aktuellen Zeitpunkt 5000 Euro kosten würde?
d) Auf ein Konto mit 1,5% Zinsen p.a. werden 7 Jahre lang, jedes Mal zu Beginn des Jahres 600 Euro eingezahlt. Wieviel Geld befindet sich am Ende der Laufzeit auf dem Konto?

Lösungen

(ohne Gewähr)

Aufgabe 1:

$A \cdot v = \begin{pmatrix} -10 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}, \det(A) = 12$

Aufgabe 2:

$x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = -5$

Aufgabe 3:

$D_f = \mathbb{R}$, $W_f = (5,\infty) = \{x \in \mathbb{R} : 5 < x\}$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 5$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty$

Aufgabe 4:

$f(x) = \frac{4}{3}x^2 + x + \frac{5}{3}$

Aufgabe 5:

HP: $(-2, 15/2)$, TP $(\frac{1}{3}, -\frac{31}{27})$

Aufgabe 6:

$f'(x) = 3x^4\cos(x^3) + 2x\sin(x^3)$, $g'(x) = \frac{e^{2x} - 2(x-1)e^{2x}}{e^{4x}}$

Aufgabe 7:

$g'(x) = \frac{3-2x}{e^{2x}}$

Aufgabe 8:

$\int_1^e \frac{1}{x} \mathrm{d}x = 1$

Aufgabe 9:

$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} -y + ze^x \\ -x + \frac{1}{z^3} \\ e^x - \frac{3y}{z^4} \end{pmatrix}$, $H_f = \begin{pmatrix} ze^x & -1 & e^x \\ -1 & 0 & -\frac{3}{z^4} \\ e^x & -\frac{3}{z^4} & \frac{12y}{z^5} \end{pmatrix}$

Aufgabe 10:

$K_5 = 3050.48$

Aufgabe 11:
a) $K_4 = 4000 \cdot 1{,}015^4 = 4245{,}45$ Euro

$$\begin{aligned} 5000 &= 4000 \cdot (1+i)^4 \\ 1{,}25 &= (1+i)^4 \\ \sqrt[4]{1{,}25} &= 1+i \\ i &= \sqrt[4]{1{,}25} - 1 = 0{,}057 \end{aligned}$$

gesuchter Zinssatz: 5,7%

b) $K_2 = 5000 \cdot \left(1 + \frac{0.01}{12}\right)^{12 \cdot 2} = 5100{,}96$ Euro

c)

$$KW = \frac{1000}{(1{,}02)^3} + \frac{2000}{(1{,}02)^5} + \frac{3000}{(1{,}02)^{10}} = 5214{,}82 \text{ Euro}$$
$$KW = 5214{,}82 > 5000$$

Der Kapitalwert ist höher als die Kosten, deshalb lohnt sich die Investition aus Unternehmersicht.

d)
Formel für regelmäßige Einzahlungen:

$$K_t = B \cdot \sum_{k=1}^{t} (1+i)^k$$

$$\begin{aligned} K_7 &= 600 \cdot \sum_{k=1}^{7} 1{,}015^k \\ &= 600 \cdot \left(\sum_{k=0}^{7} 1{,}015^k - 1 \right) \\ &= 600 \cdot \left(\frac{1 - 1{,}015^8}{1 - 1{,}015} - 1 \right) \\ &= 4459{,}70 \text{ Euro} \end{aligned}$$