

# Bewertungshalbgruppen

Bewertungstheoretische und  
modelltheoretische Betrachtungen

# Inhalt

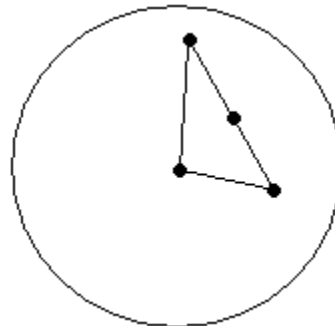
- Grundlegende Definitionen, Motivation
- Beispiele, Bewertungshalbgruppen der komplexen Ebene
- Zirkelhalbgruppen mit reeller Achse
- Fortsetzungstheorie
- Axiome für die Einheitszscheibe
- Zirkelhalbgruppen in formalen Potenzreihenkörpern
- Einbettung in formale Potenzreihenkörper

# Grundlegende Definitionen, Motivation

Unser Interesse gilt folgenden Begriffen:

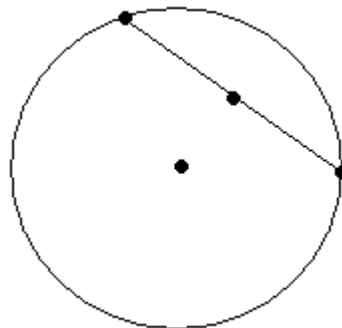
**Definitionen 2.1.** Es sei  $K$  ein Körper, und es sei  $T$  eine Teilmenge von  $K$ .

- $T$  heißt eine *Halbgruppe* von  $K$ , wenn  $T \cdot T \subseteq T$  gilt. Es sei ferner  $T^\times := \{t \in T \setminus \{0\} \mid 1/t \in T\}$  die Menge der *Einheiten* von  $T$ .
- Gilt zudem  $K = (T \setminus \{0\})^{-1} \cup T$ , so heißt  $T$  eine *totale Halbgruppe* von  $K$ .
- Gelten zudem auch noch  $T + T \subseteq 2 \cdot T$  und  $2 \notin T$ , so nennen wir  $T$  eine *Bewertungshalbgruppe* von  $K$ .



# Grundlegende Definitionen, Motivation

- Eine Bewertungshalbgruppe  $T$  heißt *Zirkelhalbgruppe*, wenn sie die Bedingung  $2 \cdot T \subseteq T^\times + T^\times$  erfüllt.



Die komplexe Einheitskreis ist das Standardbeispiel einer Zirkelhalbgruppe. Doch selbst innerhalb der komplexen Zahlen gibt es noch viele weitere Beispiele (s.u.). (Anm.: Hat ein Körper eine Bewertungshalbgruppe, so muß seine Charakteristik 0 sein.)

# Grundlegende Definitionen, Motivation

Innerhalb der formalen Sprache

$$\mathcal{L} = \{+, \cdot, -, 0, 1\} \cup \{T\}$$

suchen wir ein vollständiges Axiomensystem für die Theorie der komplexen Einheitsscheibe. Zusammen mit den Axiomen für algebraisch abgeschlossene Körper sollen dabei möglichst „geometrische“ Axiome gefunden werden.

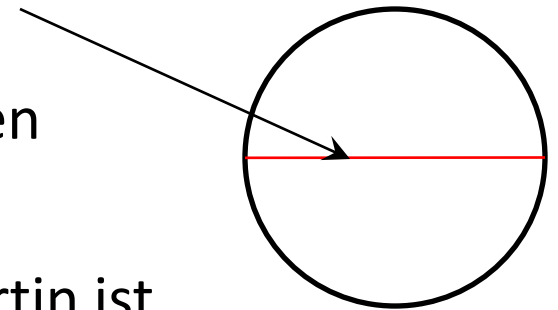
# Grundlegende Definitionen, Motivation

Damit ist genauer folgendes gemeint: Innerhalb der formalen Sprache kann über die Menge

$$R_0 := \left\{ \frac{1}{2} \left( t + \frac{1}{t} \right) \mid t \in T^\times \right\}$$

„geredet“ werden. Man könnte mit Axiomen ganz direkt fordern, daß  $(R_0 \setminus \{0\})^{-1} \cup R_0$

ein Unterkörper vom Index 2 ist. Gemäß Artin ist er dann ein reell abgeschlossener Körper. Die Bewertungshalbgruppe ist dann die Einheitsscheibe bzgl. dieses Unterkörpers. Über die bekannte Vollständigkeit der Theorie reell abgeschlossener Körper kann dann auch die Vollständigkeit unserer Axiome leicht gezeigt werden.



# Grundlegende Definitionen, Motivation

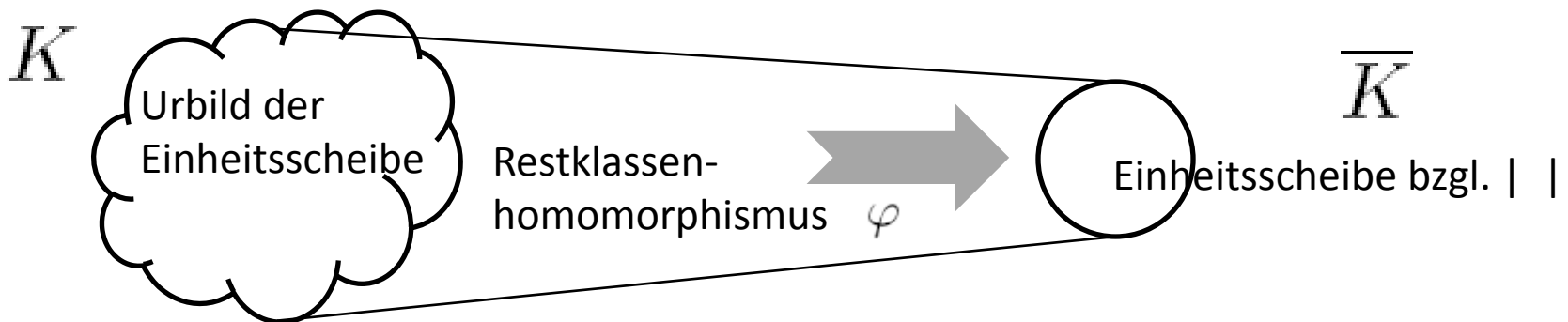
Von diesem zuletzt beschriebenen Ansatz wollen wir uns „möglichst weit“ wegbewegen. Es soll „möglichst wenig“ über  $R_0$  im Axiomensystem „geredet“ werden, denn dies entspricht einer Axiomatisierung durch Einführung von Koordinaten und beschränkt die Anwendbarkeit des Systems. Statt dessen soll ein System entstehen, daß nur über  $T$  „redet“.

Desweiteren soll generell die Struktur von Bewertungshalbgruppen untersucht werden.

# Grundlegende Definitionen, Motivation

Bereits Krull hat 1961 grundlegende Ergebnisse zu Bewertungshalbgruppen gefunden:

Krull interessierte sich für Halbgruppen, die durch das Zusammensetzen von Bewertungsringen und archimedischen Absolutbeträgen  $| \cdot |$  auf dem Restklassenkörper hervorgehen.



Solche Halbgruppen nennen wir *Krull-Halbgruppen*.

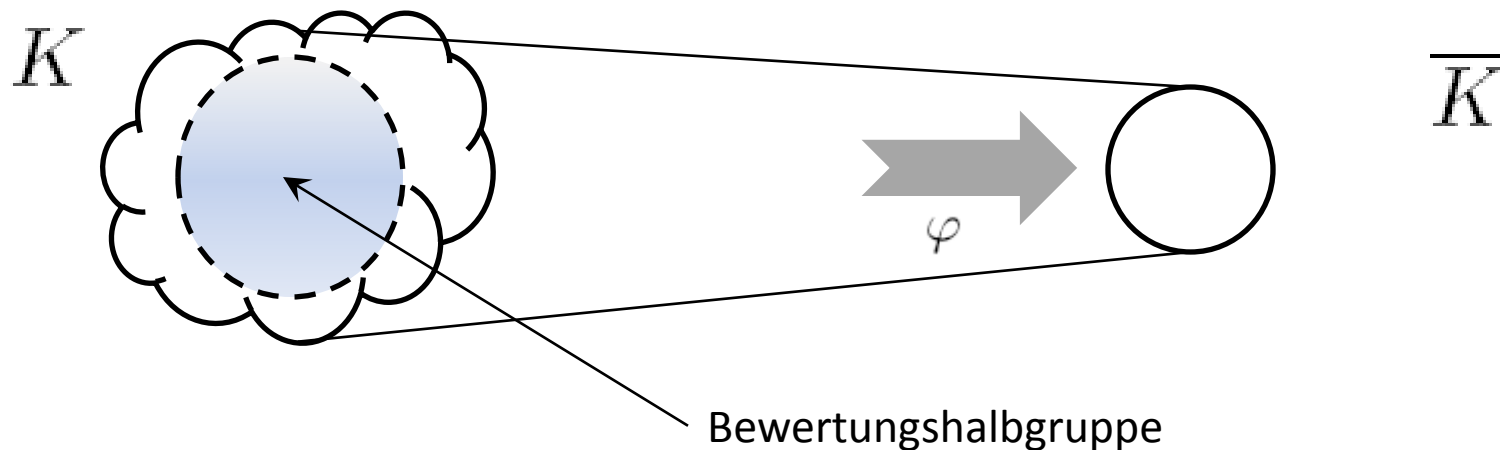


# Grundlegende Definitionen, Motivation

Jede Bewertungshalbgruppe induziert auf kanonische Weise einen Bewertungsring  $\mathcal{O}$ ; dieser ist der kleinste Bewertungsring, der die Halbgruppe noch enthält.

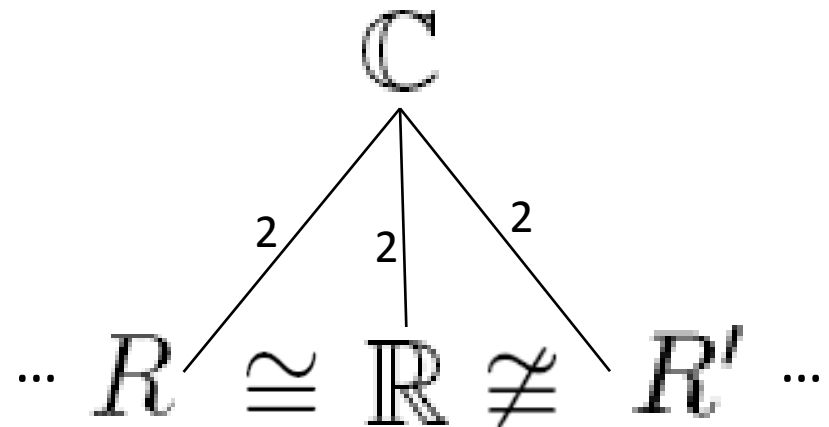
Krull konnte folgendes zeigen:

*Der Restklassenkörper muß einen archimedischen Absolutbetrag dergestalt besitzen, daß die Bewertungshalbgruppe in der entspr. Krull-Halbgruppe enthalten ist.*



# Beispiele, Bewertungshalbgruppen der komplexen Ebene

Innerhalb der komplexen Zahlen sind die reellen Zahlen als „Achse“ in keinsten Weise ausgezeichnet. Es gibt unendlich viele alternative Unterkörper mit dem Index 2. Manche sind isomorph zu den reellen Zahlen, und manche nicht:



Sie alle sind reell abgeschlossene Koordinatenkörper der komplexen Zahlen, deren „Einheitsscheibe“ eine Zirkelhalbgruppe ist. Bzgl. der Topologie von  $\mathbb{R}$  liegen sie dicht in  $\mathbb{C}$ .

# Beispiele, Bewertungshalbgruppen der komplexen Ebene

Aber auch die gewöhnliche komplexe Einheitskreis besitzt überraschenderweise echte Teilmengen, die zwar keine Zirkelhalbgruppen aber immer noch Bewertungshalbgruppen sind. Folgendes Beispiel illustriert das allg. Vorgehen zum Konstruieren solcher Halbgruppen:

Als Vektorraum über den rationalen Zahlen besitzen die reellen Zahlen eine sog. *Hamel*-Basis  $H$ . Es sei  $\mathcal{F}$  die Menge aller „Linearkombinationen“:

$$f : H \rightarrow \mathbb{Q} \quad |\{h \in H \mid f(h) \neq 0\}| < \infty$$

Wir wählen nun zwei Elemente  $h', h'' \in H$  mit  $h' \neq h''$

und setzen: 
$$A := \left\{ \sum_{h \in H} f(h) \cdot h \mid f \in \mathcal{F}, f(h') = f(h'') = 0 \right\}$$

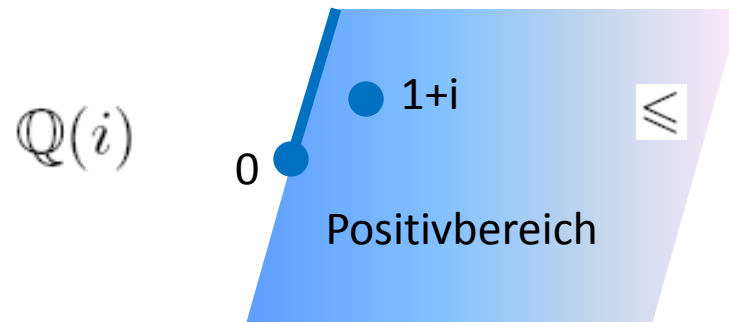
# Beispiele, Bewertungshalbgruppen der komplexen Ebene

Die Menge  $A$  ist eine Untergruppe von  $\mathbb{R}$ . Bezeichnet  $\eta$  ihren Restklassenhomomorphismus, so definiert

$$a + ib \mapsto \eta(ah' + bh'') , a, b \in \mathbb{Q}$$

einen Gruppenisomorphismus:  $\mathbb{Q}(i) \cong \mathbb{R}/A$

Die Gruppe  $\mathbb{Q}(i)$  hat unendlich viele Anordnungen. Eine solche kann durch „Halbierung“ der Ebene definiert werden:



# Beispiele, Bewertungshalbgruppen der komplexen Ebene

Die Menge

$$\{e^{2\pi ir} \mid r \in \mathbb{R}, r + A \leq 0\} \cup \{x \in \mathbb{C} \mid |x| < 1\}$$

ist dann eine Bewertungshalbgruppe, die eine echte Teilmenge der komplexen Einheitskreis ist; der Punkt  $e^{2\pi i(h' + h'')}$  ist z.B. nicht in ihr enthalten.

Allgemein gilt der folgende Satz:

# Beispiele, Bewertungshalbgruppen der komplexen Ebene

**Satz 3.1.1.** *Es sei  $k$  ein Unterkörper von  $\mathbb{C}$ . Zur Abkürzung sei weiter:*

$$V := \{r \in \mathbb{R} \mid e^{2\pi ir} \in k\} \quad (i := \sqrt{-1})$$

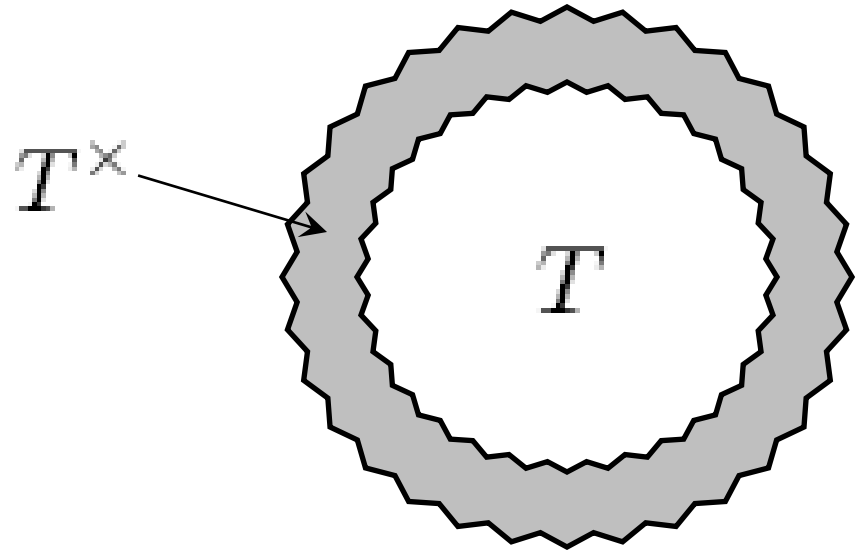
*Dann entsprechen die beschränkten totalen Halbgruppen von  $k$  umkehrbar eindeutig den Paaren  $(A, \leq)$ , für die gilt:  $A$  ist eine  $\mathbb{Z}$  umfassende Untergruppe der (additiven) Gruppe  $V$ , für die die Faktorgruppe  $V/A$  mindestens eine Anordnung besitzt, und " $\leq$ " ist eine solche Anordnung dieser Faktorgruppe.*

*Genauer entspricht dabei dem Paar  $(A, \leq)$  die totale Halbgruppe:*

$$\{e^{2\pi ir} \mid r \in V, r + A \leq 0\} \cup \{x \in k \mid |x| < 1\}$$

# Zirkelhalbgruppen mit reeller Achse

Eine Zirkelhalbgruppe  $T$  muß keinen „dünnen“ „Rand“  $T^\times$  haben; er kann „dick/wolkenartig“ sein.



Offenbar ist er dann „dünn“, wenn

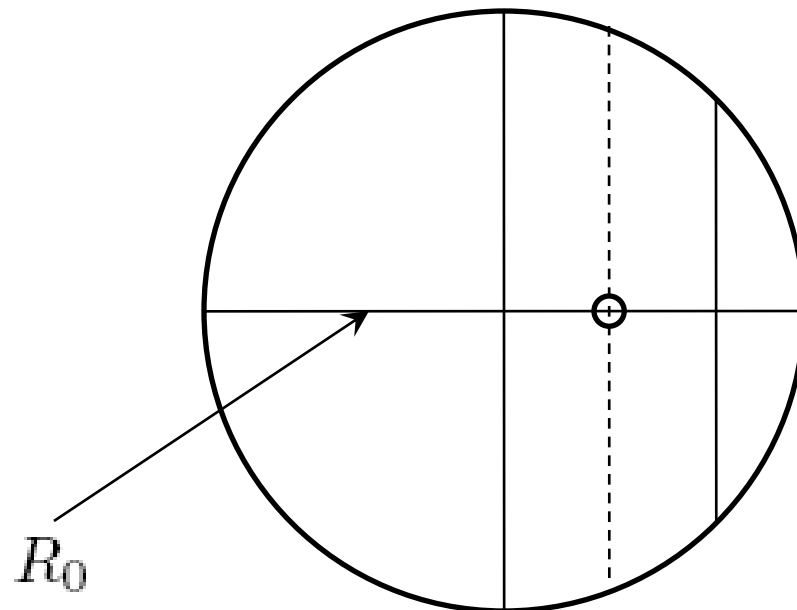
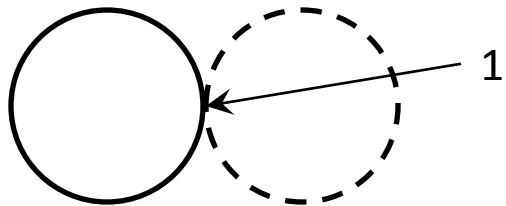
$$R_0 := \left\{ \frac{1}{2} \left( t + \frac{1}{t} \right) \mid t \in T^\times \right\} \quad \text{„dünn“ ist.}$$

# Zirkelhalbgruppen mit reeller Achse

Es stellt sich heraus, daß  $R_0$  genau dann „dünn“ ist, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$T \cap (T + 2) = \{1\}$$

$$\frac{1}{2} \cdot (R_0 + R_0) \subseteq R_0$$



Wir nennen  $R = \mathbb{Q}(R_0)$   
die *Achse* von  $T$ .

Genauer gilt:



# Zirkelhalbgruppen mit reeller Achse

**Lemma 3.2.1.** *Es sei  $T$  eine Zirkelhalbgruppe eines Körpers  $K$ , der ein Element  $i \in K$  mit  $i^2 = -1$  besitze. Weiter sei die Menge  $R_0$  wie oben angegeben definiert, und es sei  $R = \mathbb{Q}(R_0)$ . Dann sind die folgenden drei Aussagen äquivalent:*

1.  $R$  ist reell.

2. Es gelten die Beziehungen:

$$T \cap (T + 2) = \{1\} \quad \text{und} \quad \frac{1}{2} \cdot (R_0 + R_0) \subseteq R_0$$

3.  $R$  ist euklidisch.

*Ist  $R$  reell (mit der Anordnung " $\leq$ "), so gelten zudem noch die Aussagen:*

$$T = \{x + i \cdot y \mid x, y \in R, x^2 + y^2 \leq 1\},$$

$$R_0 = \{x \in R \mid -1 \leq x \leq 1\} = T \cap R,$$

$$R = \left\{ \frac{r}{s} \mid r, s \in R_0, s \neq 0 \right\},$$

$$\forall e, t, x, y \in T^\times (e + t = x + y \neq 0 \Rightarrow \{e, t\} = \{x, y\}),$$

$K$  ist quadratisch abgeschlossen

# Zirkelhalbgruppen mit reeller Achse

Erläuterungen zum *Beweis*: Für  $t \in T^\times$  kann man wie im Komplexen die Begriffe *Real-* und *Imaginärteil* einführen:

$$\operatorname{Re}(t) := \frac{1}{2} \cdot \left(t + \frac{1}{t}\right) \qquad \operatorname{Im}(t) := \operatorname{Re}(-it)$$

Es gilt:  $\operatorname{Re}(t) + i \cdot \operatorname{Im}(t) = t$

Ist  $x \in T$ , so gibt es  $e, t \in T^\times$  mit:  $x = \frac{1}{2}(e + t)$  Folgt:

$$x = \frac{1}{2} \cdot (\operatorname{Re}(e) + \operatorname{Re}(t)) + i \cdot \frac{1}{2} \cdot (\operatorname{Im}(e) + \operatorname{Im}(t))$$

$$R(i) = K, [K : R] \leq 2$$

# Zirkelhalbgruppen mit reeller Achse

$$\begin{aligned} \text{Wegen } \operatorname{Re}(e) \cdot \operatorname{Re}(t) &= \frac{1}{2}\left(e + \frac{1}{e}\right) \cdot \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right) \\ &= \frac{1}{4} \cdot \left(et + \frac{1}{et} + \frac{e}{t} + \frac{t}{e}\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\left(et + \frac{1}{et}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{e}{t} + \frac{t}{e}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot (\operatorname{Re}(et) + \operatorname{Re}(e/t)) \end{aligned}$$

gilt:  $R_0 \cdot R_0 \subseteq \frac{1}{2} \cdot (R_0 + R_0)$  Und man erkennt nun schnell:

$$\left\{ \frac{r_0 + \dots + r_n}{s_0 + \dots + s_m} \mid n, m \in \mathbb{N}, r_\nu, s_\mu \in R_0, s_0 + \dots + s_m \neq 0 \right\}$$

$= \mathbb{Q}(R_0) = R$  Die Achse kann also schon recht konkret angegeben werden.

# Zirkelhalbgruppen mit reeller Achse

Gilt die Bedingung  $\frac{1}{2} \cdot (R_0 + R_0) \subseteq R_0$ , so ist  $R_0$

multiplikativ abgeschlossen. Die letzte Darstellung der Achse vereinfacht sich daher zu:

$$R = \left\{ \frac{r}{s} \mid r, s \in R_0, s \neq 0 \right\}$$

Mit  $T \cap (T + 2) = \{1\}$  folgt nun relativ leicht, daß -1 keine Summe von Quadraten der Achse sein kann. Damit ist gezeigt, daß die Bedingungen erzwingen, daß die Achse reell ist.-

Ist umgekehrt die Achse reell, so gibt es die Zirkelhalbgruppe:

$$T_R := \{x + i \cdot y \mid x, y \in R, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

# Zirkelhalbgruppen mit reeller Achse

Ist  $x \in T$ , so gibt es  $e, t \in T^\times$  mit:  $x = \frac{1}{2}(e + t)$  (\*)

Wegen  $Re(t)^2 + Im(t)^2 = 1$  gilt:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2} \cdot (Re(e) + Re(t))\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot (Im(e) + Im(t))\right)^2 + \\ & \left(\frac{1}{2} \cdot (Re(e) - Re(t))\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot (Im(e) - Im(t))\right)^2 \\ & = 1 \end{aligned}$$

Und deshalb folgt sofort  $x \in T_R$ . Also ist:  $T \subseteq T_R$

Gäbe es ein  $y \in T_R \setminus T$ , so folgte für  $x := 1/y \in T_R^\times \cup T$

aus (\*) sofort:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2} \cdot (Re(e) + Re(t))\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot (Im(e) + Im(t))\right)^2 = 1 \\ & \left(\frac{1}{2} \cdot (Re(e) - Re(t))\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot (Im(e) - Im(t))\right)^2 = 0 \end{aligned}$$

# Zirkelhalbgruppen mit reeller Achse

Weil die Achse reell ist, ergäbe sich aus der letzten Gleichung:

$$\operatorname{Re}(e) = \operatorname{Re}(t), \operatorname{Im}(e) = \operatorname{Im}(t)$$

Aber das ergäbe den Widerspruch:

$$e = t \quad x = \frac{1}{2} \cdot (t + t) = t \in T^\times, y = 1/x \in T$$

Also ist  $T = T_R$  und dann gelten natürlich die geometrischen

Bedingungen:  $T \cap (T + 2) = \{1\} \quad \frac{1}{2} \cdot (R_0 + R_0) \subseteq R_0$

Nun sei die Achse als reell vorausgesetzt.

Ist  $r \in R$  mit  $r > 1$ , so ist:  $\frac{r-1}{r+1} \in R_0$

# Zirkelhalbgruppen mit reeller Achse

Also gibt es eine Einheit  $t \in T^\times$  mit:

$$\frac{r-1}{r+1} = \frac{1}{2} \left( t + \frac{1}{t} \right)$$

Löst man dies nach  $t$  auf, so ergibt sich:

$$t = \frac{r-1}{r+1} \pm i \frac{2\sqrt{r}}{r+1}$$

Es folgt:  $\sqrt{r} \in K, \quad R(\sqrt{r}) \subseteq K$

Die Anordnung der Achse kann auf  $R(\sqrt{r})$  fortgesetzt werden. Daher kann nur  $\sqrt{r} \in R$  sein. Somit ist die Achse euklidisch. Q.E.D.

# Zirkelhalbgruppen mit reeller Achse

Man erkennt nun leicht:

**Korollar 3.2.2.** *Es sei  $K$  ein Körper mit  $\sqrt{-1} \in K$ . Dann entsprechen die Zirkelhalbgruppen von  $K$  mit reeller Achse umkehrbar eindeutig den euklidischen Unterkörpern  $L$  von  $K$ , für die  $L(\sqrt{-1}) = K$  gilt.*

Da bei über  $\mathbb{Q}$  algebraischen Körpern die Bewertungsringe trivial sind, gilt hier sogar:

**Korollar 3.3.3.3.** *Es sei  $K$  ein über  $\mathbb{Q}$  algebraischer Körper. Dann entsprechen die Zirkelhalbgruppen von  $K$  umkehrbar eindeutig den euklidischen Unterkörpern  $L$  von  $K$ , für die  $K = L(\sqrt{-1})$  gilt.*



# Zirkelhalbgruppen mit reeller Achse

Besitzen über  $\mathbb{Q}$  algebraische Körper Zirkelhalbgruppen, so sind sie insbesondere quadratisch abgeschlossen. Aber nicht jeder derartige quadratisch abgeschlossene Körper besitzt eine Zirkelhalbgruppe! Beispiel: Es sei  $F$  der Zerfällungskörper von:

$$X^3 - 2$$

Nach Zorn gibt es dann einen maximalen Körper  $k$  bezüglich:  
 $k$  ist algebraisch über  $\mathbb{Q}$

$$k \cap F = \mathbb{Q}$$

Man kann nun beweisen:

*Dann ist  $k$  ein quadratisch abgeschlossener Körper, der die folgende Eigenschaft besitzt: Für jeden reellen Unterkörper  $R$  von  $k$  gilt:*

$$[k : R] = \infty$$

# Zirkelhalbgruppen mit reeller Achse

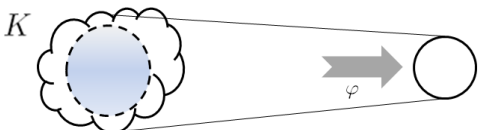
Anmerkung: Hat ein Körper  $K$  eine Zirkelhalbgruppe  $T$ , so ist ihr Bild  $\overline{T} := \varphi(T)$  immer eine Zirkelhalbgruppe mit reeller Achse.

Denn gemäß Ostrowski gibt es eine Einbettung  $\tau : \overline{K} \hookrightarrow \mathbb{C}$

und ein  $\varepsilon > 0$  mit:

$$\forall x \in \overline{K} \quad |x| = |\tau(x)|^\varepsilon \quad (\sqrt{-1} \in K)$$

Ist  $x \in \overline{T}^\times$ , so ist  $|\tau(x)| = 1$ . Daraus folgt:



$$\tau\left(\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\tau(x) + \frac{1}{\tau(x)}\right) \in \mathbb{R}$$

Also liegt  $\left\{\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) \mid x \in \overline{T}^\times\right\}$

in einem reellen Unterkörper von  $\overline{K}$ .

Q.E.D.

# Fortsetzungstheorie

Wir betrachten Fortsetzungen von Bewertungshalbgruppen auf Oberkörper. Dies wird analog wie bei Bewertungsringen definiert.

Die Fortsetzungen einer Krull-Halbgruppe entsprechen den Fortsetzungen der zugehörigen Bewertung und des zugehörigen archimedischen Absolutbetrages.

**Satz 4.2.** *Es sei  $L/K$  eine Körpererweiterung, und es seien  $E, T$  Krull-Halbgruppen von  $L$  bzw.  $K$ . Gemäß der Definition 2.3 sei  $E$  die Zusammensetzung eines Bewertungsrings  $O_E$  von  $L$  und eines archimedischen Absolutbetrages  $|\cdot|_E$  des Restklassenkörpers  $\bar{L}$ . Und  $T$  sei die Zusammensetzung eines Bewertungsrings  $O_T$  von  $K$  und eines archimedischen Absolutbetrages  $|\cdot|_T$  des Restklassenkörpers  $\bar{K}$ . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1.  $E$  ist eine Fortsetzung von  $T$ .
2.  $O_E$  ist eine Fortsetzung von  $O_T$ , und die beiden Beträge  $(|\cdot|_E)|_{\bar{K}}$  und  $|\cdot|_T$  sind zueinander äquivalent.

# Fortsetzungstheorie

Die Fortsetzungen einer Krull-Halbgruppe auf eine normale Körpererweiterung sind stets konjugiert zueinander:

**Satz 4.3.** *Es sei  $N/K$  eine algebraische Körpererweiterung, und es sei  $T$  eine Krull-Halbgruppe von  $K$ . Dann gilt:*

1. *Es gibt stets eine Krull-Halbgruppe  $T_N$  von  $N$ , die  $T$  auf  $N$  fortsetzt.*
2. *Ist  $N/K$  normal, so sind die Mengen*

$$\sigma(T_N), \quad \text{mit } \sigma \in \text{Gal}(N/K),$$

*genau die Krull-Halbgruppen von  $N$ , die  $T$  auf  $N$  fortsetzen.*

# Fortsetzungstheorie

Bei Zirkelhalbgruppen mit reeller Achse reduziert sich die Frage der Fortsetzbarkeit ganz auf die Fortsetzbarkeit ihrer Achse (die ja ein euklidischer Koordinatenkörper ist).

**Satz 4.4.** *Es sei  $L/K$  eine Körpererweiterung mit  $\sqrt{-1} \in K$ , und es seien  $E, T$  Zirkelhalbgruppen von  $L$  bzw.  $K$  mit reellen Achsen  $R_E$  bzw.  $R_T$  (gemäß Kapitel 3.2). Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1.  *$E$  ist eine Fortsetzung von  $T$ .*
2.  $R_E \cap K = R_T$

# Fortsetzungstheorie

Die Fortsetzungen einer Zirkelhalbgruppe mit reeller Achse auf eine normale Körpererweiterung sind stets konjugiert zueinander:

**Satz 4.6.** *Es sei  $N/K$  eine normale Körpererweiterung mit  $\sqrt{-1} \in K$ . Es sei weiter  $T$  eine Zirkelhalbgruppe mit reeller Achse von  $K$ , und es sei  $T_N$  eine Zirkelhalbgruppe mit reeller Achse von  $N$ , die  $T$  auf  $N$  fortsetzt. Dann sind die Mengen*

$$\sigma(T_N), \quad \text{mit } \sigma \in \text{Gal}(N/K),$$

*genau die Zirkelhalbgruppen mit reeller Achse von  $N$ , die  $T$  auf  $N$  fortsetzen.*

# Fortsetzungstheorie

Zirkelhalbgruppen mit reeller Achse liegen in quadratisch abgeschlossenen Körpern. Bei diesen sind folgende Dinge zu beachten:

Zwei quadratisch abgeschlossene Körper  $K/k$  der Charakteristik 0 können durchaus so ineinander liegen, daß eine endliche, nicht-triviale Körpererweiterung besteht. Ist sie normal, so muß ihr Grad ungerade sein. Generell gilt:

Es sei  $K/k$  eine endliche Körpererweiterung. Die beiden Körper mögen dabei die Charakteristik Null besitzen. Weiter sei  $K$  quadratisch abgeschlossen. Dann gilt (siehe Corollary 5.11. in Kap. VIII auf S. 270 in [10]):

Ist  $i \in k$ , so ist  $k$  quadratisch abgeschlossen.

Ist  $i \notin k$ , so ist  $k$  euklidisch.

# Fortsetzungstheorie

Ist  $K$  ein quadratisch abgeschlossener Körper der Charakteristik Null und ist  $E$  ein maximaler reeller Unterkörper (der nach Zorn stets existiert), so ist leider nicht bekannt, ob der Fall

$$2 < [K : E] < \infty$$

überhaupt auftreten kann. Man kann aber folgendes zeigen:

*Es sei  $K/E$  endlich. Ist  $K/E$  normal, oder besitzt  $K$  nur ungerade Erweiterungen, so muß  $[K : E] = 2$  sein.*

Übersetzt man dies in die Sprache der Zirkelhalbgruppen mit reeller Achse, so ergibt sich folgender Fortsetzungssatz:



# Fortsetzungstheorie

**Korollar 4.5.** *Es sei  $K/k$  eine endliche Körpererweiterung mit  $\sqrt{-1} \in k$ . Weiter besitze  $k$  eine Zirkelhalbgruppe  $T$  mit reeller Achse  $R$ . Dann gelten folgende Aussagen:*

- 1. Ist  $K$  quadratisch abgeschlossen, so gilt: Gestattet  $K$  nur ungerade Erweiterungen, oder ist  $K/R$  normal, so besitzt  $K$  eine Zirkelhalbgruppe mit reeller Achse, die eine Fortsetzung von  $T$  ist.*
- 2. Besitzt  $K$  eine Zirkelhalbgruppe mit reeller Achse, die eine Fortsetzung von  $T$  ist, und ist  $K/k$  normal, so muß  $[K : k]$  ungerade sein.*

# Fortsetzungstheorie

Da Bewertungshalbgruppen mit reeller Achse ja auch einen kanonischen Bewertungsring definieren, ergibt sich die Frage nach der Fortsetzbarkeit der Halbgruppen auf henselsche bzw. maximale unmittelbare Erweiterungskörper. Hier ergaben sich überraschenderweise positive Aussagen:

Da sich bei derartigen Erweiterungen der Restklassenkörper nicht ändert, ist sofort klar, daß sich Krull-Halbgruppen stets auf sie fortsetzen lassen.

Weiter gilt:

# Fortsetzungstheorie

**Satz 4.7.** *Es sei  $T$  eine Zirkelhalbgruppe mit reeller Achse eines Körpers  $K$ . Zudem gelte  $\sqrt{-1} \in K$ . Und es sei  $K_H$  seine henselsche Hülle bezüglich des von der Halbgruppe induzierten Bewertungsrings. Dann besitzt  $K_H$  eine Zirkelhalbgruppe mit reeller Achse, die  $T$  fortsetzt.*

**Satz 4.10.** *Es sei  $T$  eine Zirkelhalbgruppe mit reeller Achse eines Körpers  $K$ . Zudem gelte  $\sqrt{-1} \in K$ . Und es sei  $K_M$  seine maximale unmittelbare Erweiterung bezüglich des von der Halbgruppe induzierten Bewertungsrings. Dann besitzt  $K_M$  eine Zirkelhalbgruppe mit reeller Achse, die  $T$  fortsetzt.*

# Axiome für die Einheitsscheibe

Wie angekündigt können wir nun ein vollständiges Axiomensystem in der Sprache

$$\mathcal{L} = \{+, \cdot, -, 0, 1\} \cup \{T\}$$

für die Theorie der Einheitsscheibe der komplexen Zahlen erstellen. Dabei wollen wir die bereits bewiesene Vollständigkeit der Theorie der reell abgeschlossenen Körper ausnutzen.

Die Idee besteht darin die Axiome so zu formulieren, daß der zugrundeliegende Körper  $K$  algebraisch abgeschlossen und  $T$  eine in ihm liegende Zirkelhalbgruppe mit reeller Achse ist. (Die Achse ist dann ein reell abgeschlossener Körper.)

# Axiome für die Einheitsscheibe

Man kann nun jede Aussage in der Sprache  $\mathcal{L}$  übersetzen in eine Aussage in der Sprache der Körper, indem man Punkte des zugrundeliegenden Körpers durch die entsprechenden Koordinatentupel bzgl. der Achse  $R$  von  $T$  ausdrückt.

Beispiel:

$$\forall z \in K (z \in T \Rightarrow z^2 \in T)$$



$$\begin{aligned} \forall x, y \in R ((\exists r \in R \quad x^2 + y^2 + r^2 = 1) \\ \Rightarrow (\exists s \in R \quad (x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2 + s^2 = 1)) \end{aligned}$$

# Axiome für die Einheitsscheibe

Die übersetzten Aussagen sind entweder in allen reell abgeschlossenen Körpern wahr oder in allen falsch. Auf diese Weise ergibt sich dann leicht die elementare Äquivalenz zweier Modelle der Axiome bzgl.  $\mathcal{L}$ .

Unsere Axiome lauten:

$K$  ist ein algebraisch abgeschlossener Körper.

$T$  ist eine Zirkelhalbgruppe von  $K$ .

$$T \cap (T + 2) = \{1\}$$

$$R_0 + R_0 \subseteq 2 \cdot R_0$$

# Axiome für die Einheitszscheibe

Ausführlicher:

$K$  ist ein algebraisch abgeschlossener Körper.

$$T \cdot T \subseteq T, 2 \notin T$$

$$K \subseteq (T \setminus \{0\})^{-1} \cup T$$

$$T + T \subseteq 2T \subseteq T^\times + T^\times$$

$$T \cap (T + 2) \subseteq \{1\}$$

$$R_0 + R_0 \subseteq 2R_0$$

# Zirkelhalbgruppen in formalen Potenzreihenkörpern

Zu einem Körper  $\overline{K}$  und einer angeordneten, abelschen Gruppe  $\Gamma$  betrachten wir den Körper  $\overline{K}((\Gamma))$  der formalen Potenzreihen:

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} a_{\gamma} t^{\gamma} \quad \text{mit} \quad a_{\gamma} \in \overline{K}$$

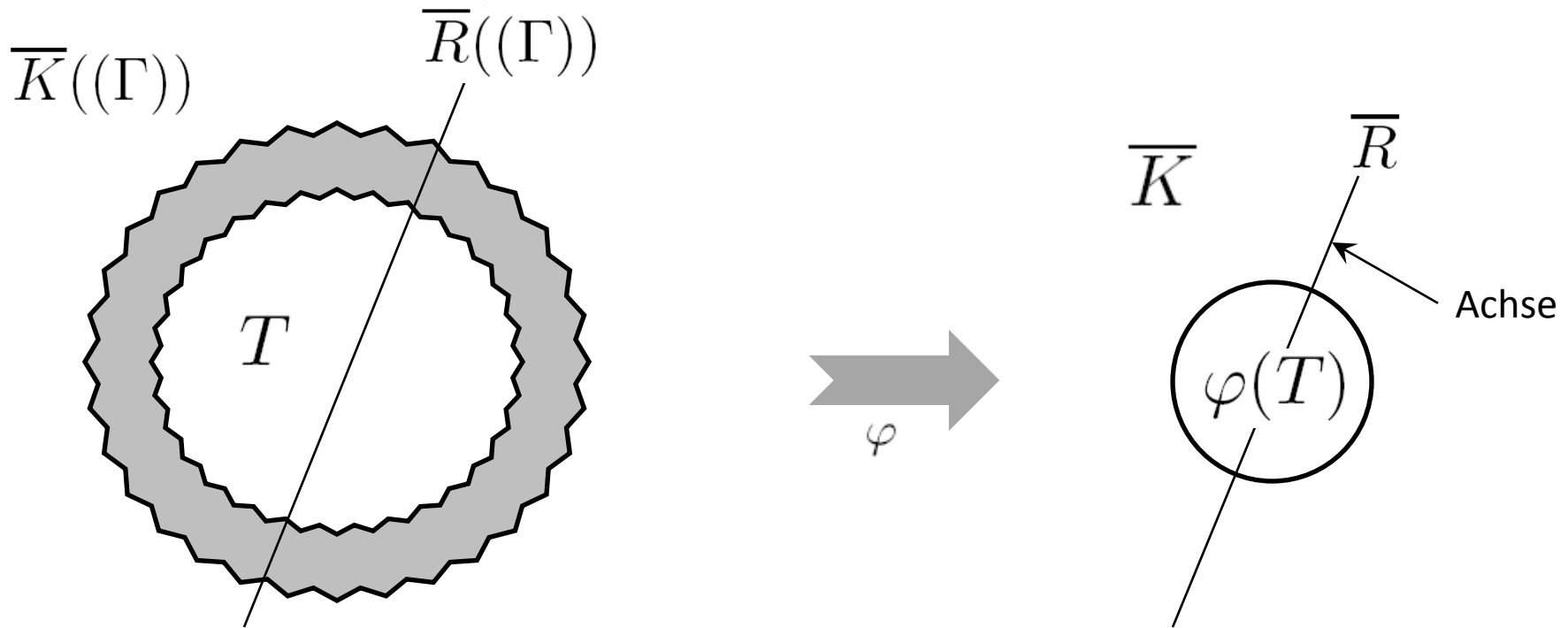
Mit  $\vartheta$ ,  $O$ ,  $\varphi$  bezeichnen wir seine kanonische Bewertung bzw. deren Bewertungsring und Restklassenhomomorphismus.

Besitzt  $\overline{K}((\Gamma))$  eine Zirkelhalbgruppe  $T$ , so ist  $\varphi(T)$  eine Zirkelhalbgruppe mit reeller Achse  $\overline{R}$ . Ist  $\overline{K}((\Gamma))$  algebraisch abgeschlossen, so ist diese ein reell abgeschlossener Koordinatenkörper des Restklassenkörpers  $\overline{K}$ .



# Zirkelhalbgruppen in formalen Potenzreihenkörpern

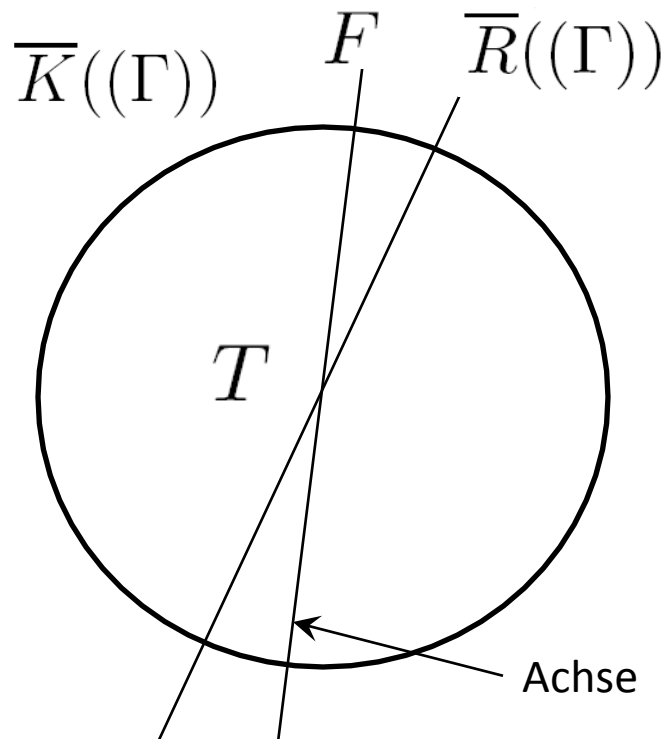
Man erhält einen reell abgeschlossenen Koordinatenkörper  $\overline{R}((\Gamma))$  von  $\overline{K}((\Gamma))$ . Es stellt sich die Frage, wie er von  $T$  abhängt.



Ansatz: Axiome finden, die  $\overline{R}((\Gamma))$  zur Achse von  $T$  machen.

# Zirkelhalbgruppen in formalen Potenzreihenkörpern

Problem: Selbst wenn  $T$  eine reelle Achse  $F$  besitzt, so folgt zunächst nur, daß  $F$  und  $\overline{R}((\Gamma))$  dieselbe Bewertung/Topologie auf  $\overline{K}((\Gamma))$  induzieren.

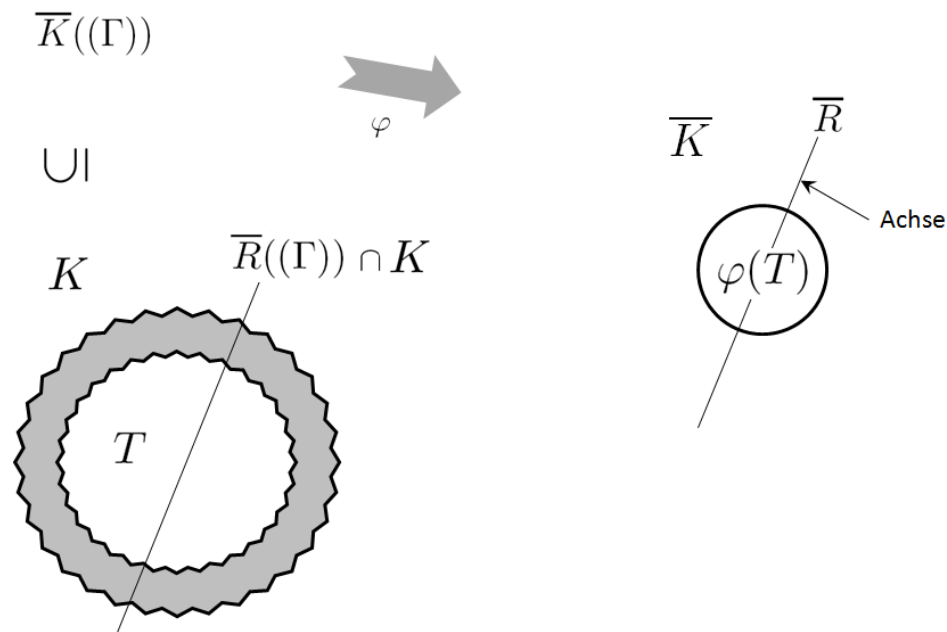


Die beiden reellen Körper sind genau dann gleich, wenn zusätzlich gilt:

1.  $\overline{R} \cup \{t^\gamma \mid \gamma \in \Gamma\} \subseteq F$
2.  $F$  "truncation-closed"
 
$$\iff \left( \sum_{\gamma \in \Gamma} a_\gamma t^\gamma \in F \right. \\ \left. \Rightarrow \sum_{\gamma < \delta} a_\gamma t^\gamma \in F \right)$$

# Einbettung in formale Potenzreihenkörper

Hat ein algebraisch abgeschlossener Körper  $K$  eine Zirkelhalbgruppe  $T$ , deren induzierte Bewertung einen Restklassenkörper  $\overline{K}$  und eine Wertegruppe  $\Gamma$  besitzt, so kann man ihn in  $\overline{K}((\Gamma))$  bewertungsstreu einbetten:



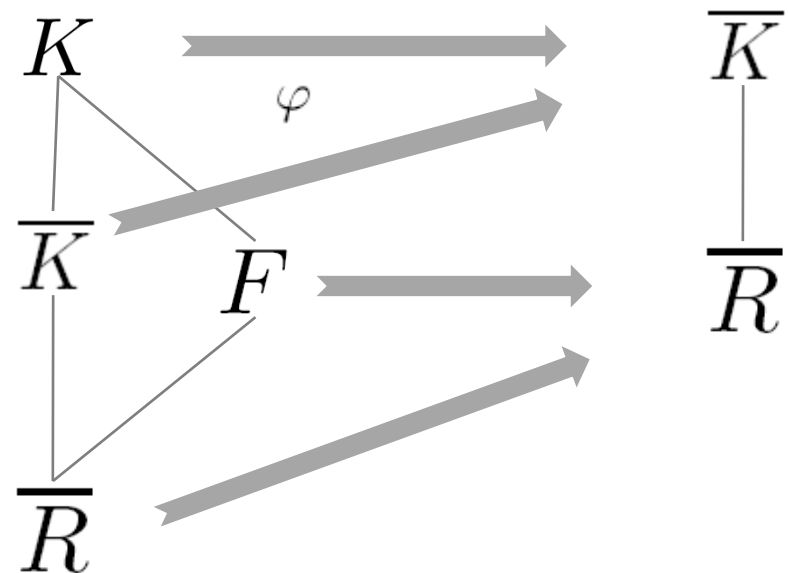
# Einbettung in formale Potenzreihenkörper

Diese Einbettung wird folgendermaßen konstruiert:

Da  $K$  henselsch ist, kann  $\overline{K}$  in den Bewertungsring von  $K$  eingebettet werden. Mit dem Lemma von Zorn kann man nun einen Zwischenkörper  $F$  von  $K/\overline{R}$  finden, der maximal ist bzgl.:

$$\overline{F} = \overline{R}$$

Man erkennt leicht, daß  $F$  henselsch und reell abgeschlossen ist. Somit ist  $\mathcal{V}(F^\times)$  divisibel. Und daraus kann man noch  $\mathcal{V}(F^\times) = \Gamma$  ableiten.



# Einbettung in formale Potenzreihenkörper

Man kann  $\Gamma$  als Vektorraum über  $\mathbb{Q}$  auffassen. Als solcher hat er eine Basis  $\mathcal{B}$ . Zu jedem Basiselement  $\beta \in \mathcal{B}$  gibt es ein Körperelement:

$$t^\beta \in F^\times \quad \text{mit} \quad \vartheta(t^\beta) = \beta \quad \text{und} \quad t^\beta \geq 0$$

Jedes  $\gamma \in \Gamma$  hat eine Darstellung:

$$\gamma = \frac{m_1}{n_1} \beta_1 + \dots + \frac{m_n}{n_n} \beta_n \quad \beta_j \in \mathcal{B}$$

Es sei:

$$t^\gamma := \left( \sqrt[n_1]{t^{\beta_1}} \right)^{m_1} \dots \left( \sqrt[n_n]{t^{\beta_n}} \right)^{m_n}$$

Dann folgt:

$$\vartheta(t^\gamma) = \gamma, \quad t^{\lambda+\mu} = t^\lambda t^\mu$$

# Einbettung in formale Potenzreihenkörper

Man hat nun folgende Körpererweiterungen, die offenbar unmittelbar sind:

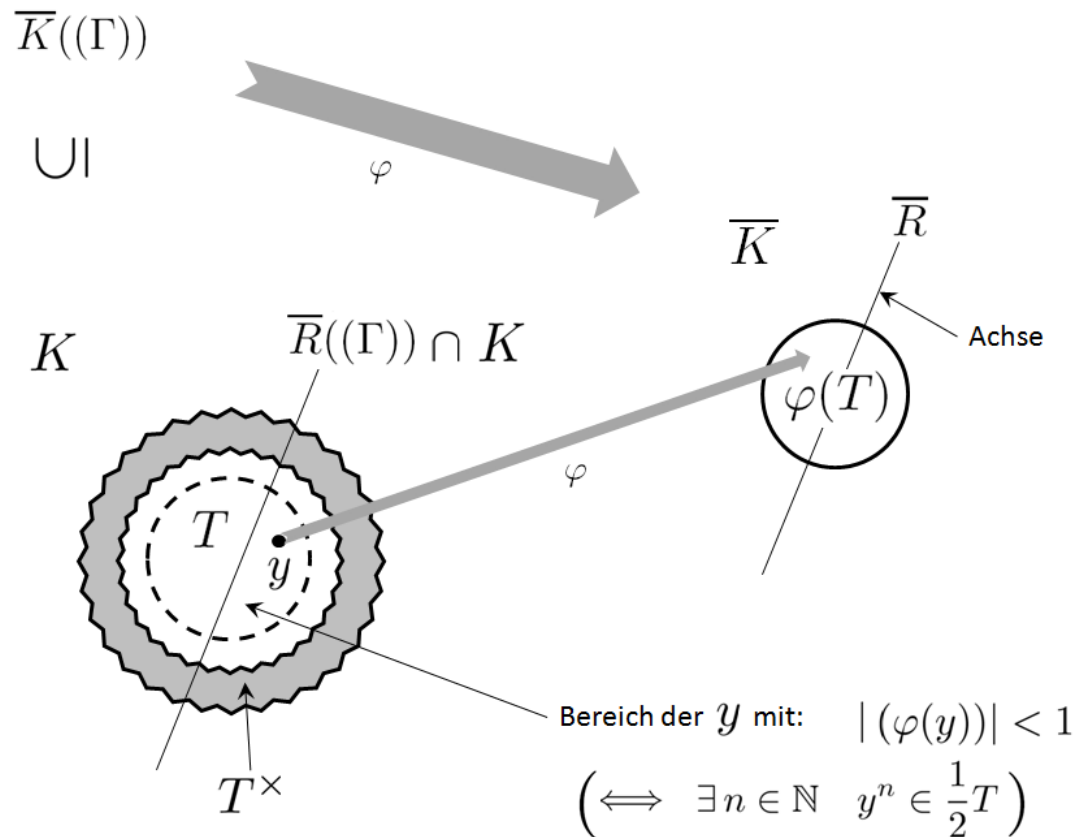
$$\begin{array}{ccc} & K & \overline{K}((\Gamma)) \\ & \searrow & \nearrow \\ \overline{K}(\{t^\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}) & & \end{array}$$

Gemäß Kaplansky ist die maximale unmittelbare Erweiterung wegen  $\text{char} \overline{K} = 0$  eindeutig bestimmt. Da  $\overline{K}((\Gamma))$  maximal ist, dürfen wir schließlich folgern:

$$K \subseteq \overline{K}((\Gamma))$$

# Einbettung in formale Potenzreihenkörper

Nur für das „Innere“ von  $T$  ist leicht einzusehen, daß es in der von  $\overline{R}((\Gamma))$  definierten Einheitszscheibe liegt:



# Einbettung in formale Potenzreihenkörper

Weiteres Problem: Es gibt keinen algebraischen Standardschluß, mit dem man  $[ K : \overline{R}((\Gamma)) \cap K ] = 2$  ableiten könnte.

Generell gilt: Ist  $R$  ein reell abgeschlossener Körper und ist  $k$  ein algebraisch abgeschlossener Körper mit  $k \subseteq R(i)$ , so folgt daraus im allgemeinen nicht immer  $[ k : R \cap k ] = 2$ .



# Einbettung in formale Potenzreihenkörper

Es gilt:

**Satz 5.2.1.** *Es sei  $K$  ein algebraisch abgeschlossener Körper, der eine Zirkelhalbgruppe  $T$  besitzt. Weiter seien  $\overline{K}$  und  $\Gamma$  der Restklassenkörper bzw. die Wertegruppe der Bewertung, die die Halbgruppe induziert. Dann kann  $K$  in den Körper  $\overline{K}((\Gamma))$  bewertungstreu eingebettet und damit als dessen Unterkörper angesehen werden.*

*Zudem gilt: Bezeichnet  $\varphi$  den Restklassenhomomorphismus der kanonischen Bewertung von  $\overline{K}((\Gamma))$ , und ist  $\overline{R}$  die reelle Achse des Bildes  $\varphi(T)$ , so gilt:*

$$\{y \in T \mid \exists n \in \mathbb{N} \ y^n \in \frac{1}{2}T\} \subseteq \{f+ig \mid f, g \in \overline{R}((\Gamma)), \exists h \in \overline{R}((\Gamma)) \ f^2+g^2+h^2 = 1\}$$

*(Dabei ist  $i := \sqrt{-1}$  gesetzt.)*

Noch Fragen



Vielen Dank für Ihre  
Aufmerksamkeit

