



Numerik partieller Differentialgleichungen I

<https://www.math.uni-konstanz.de/~rohleff/numpde1.html>

1. Übungsblatt

Ausgabe: 12.12.2024, Abgabe: 19.12.2024

Aufgabe 1.1 (Theorie - 6 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, ein beschränktes und zusammenhängendes Gebiet mit C^1 -Rand $\partial\Omega$. Es sei

$$D_\psi = \{u \in C(\bar{\Omega}) \mid u(x) = \psi \text{ für } x \in \partial\Omega\}.$$

Wir betrachten den Differentialoperator L :

$$L : C^2(\Omega) \cap D_0 \longrightarrow C(\Omega) \quad , \quad Lu = -\Delta u.$$

Zeigen Sie:

- i) $\langle Lu, v \rangle = \langle u, Lv \rangle$ für $u, v \in C^2(\Omega) \cap D_0$,
- ii) L ist positiv definit.

Das Skalarprodukt von zwei auf Ω definierten Funktionen u und v ist gegeben durch

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} uv \, dx.$$

Aufgabe 1.2 (Theorie - 6 Punkte)

Vorgelegt sei die Aufgabe

$$-\Delta u = 0 \text{ in } \Omega, \quad u = \gamma \text{ auf } \partial\Omega, \tag{1}$$

$\Omega \in \mathbb{R}^2$ beschränktes Gebiet mit stückweise stetig differenzierbarem Rand $\partial\Omega$.

a) Zeigen Sie für die Lösung \bar{u} von (1) ohne Zuhilfenahme des Maximum-Minimumprinzips die Abschätzungen

$$M_0 \leq \bar{u}(x, y) \leq M_1$$

mit

$$M_0 = \min\{\bar{u}(x, y); (x, y) \in \partial\Omega\}, \quad M_1 = \max\{\bar{u}(x, y); (x, y) \in \partial\Omega\}.$$

b) Es sei jetzt $\Omega =]0, 1]^2$, $h = \frac{1}{M} > 0$ und

$$\Omega_h = \{(ih, jh); i, j \in \{1, \dots, M-1\}\}.$$

$A^h u^h = r^h$ sei das Gleichungssystem des klassischen Differenzenverfahrens der Schrittweite $h > 0$ zu (1). Zeigen Sie:

$$M_0 \leq u^h(ih, jh) \leq M_1$$

für $0 < h \leq h_0$, $i, j \in \{1, \dots, M-1\}$.

Aufgabe 1.3 (Theorie - 6 Punkte)

Es sei A^h die Matrix des klassischen Differenzenverfahrens mit Schrittweite $h = 1/M$ zur Randwertaufgabe $-\Delta u = g$ in $\Omega =]0, 1[^2$, $u = \gamma$ auf $\partial\Omega$. Weisen Sie nach, dass die Vektoren $u^{kl} \in \mathbb{R}^{\Omega_h}$, $h = 1/M$,

$$(u^{kl})_{ij} = \sin\left(\frac{ik\pi}{M}\right) \sin\left(\frac{j\ell\pi}{M}\right), \quad 1 \leq i, j \leq M-1$$

Eigenvektoren von A^h sind. Wie lauten die zugehörigen Eigenwerte λ_{kl} ? Berechnen Sie $\lim_{h \rightarrow 0} \lambda_{kl}(h)$.