Universitt Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statsitik
Johannes Schropp
Jan Rohleff

Wintersemester 2024/2025

# Numerik partieller Differentialgleichungen I

https://www.math.uni-konstanz.de/~rohleff/numpde1.html

## 4. Übungsblatt

Ausgabe: 16.01.2025, Abgabe: 23.01.2025

### Aufgabe 4.1 (Theorie - 6 Punkte)

Es sei $\Omega = (-1, 1)$ und $u(x) := |x|$, $x \in \Omega$, die *Betragsfunktion*. Zeigen Sie: $u$ besitzt die schwache Ableitung

$$u'(x) = \begin{cases} -1, & \text{falls } -1 < x < 0, \\ 1, & \text{falls } 0 < x < 1, \end{cases} \tag{1}$$

und $u' \in L^2(\Omega)$. Weisen Sie anschließend nach, dass $u'$ keine schwache Ableitung besitzen kann.

### Aufgabe 4.2 (Theorie - 6 Punkte)

Gegeben sei das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= g && \text{in } \Omega, \\ u &= \gamma_1 && \text{auf } \Gamma_1, \\ \alpha u + \frac{\partial u}{\partial n} &= \gamma_2 && \text{auf } \Gamma_2 \end{aligned} \tag{2}$$

auf einem beschränkten Gebiet $\Omega$ des $\mathbb{R}^2$ mit glattem Rand $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ für Funktionen $\alpha, \gamma_2 \in C(\Gamma_2)$, $\gamma_1 \in C(\Gamma_1)$ und $g \in C(\overline{\Omega})$. Ferner sei

$$D_\psi = \{u \in C(\overline{\Omega}) \mid u = \psi \text{ auf } \Gamma_1\},$$

und $\bar{u} \in C^2(\overline{\Omega}) \cap D_{\gamma_1}$.

Zeigen Sie mit den Mitteln der Vorlesung die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

i) $\bar{u}$ löst die Randwertaufgabe (2).

ii) $\bar{u}$ ist ein stationärer Punkt des Funktionals $I : V_{\gamma_1} \to \mathbb{R}$,

$$I(u) \;=\; \int_\Omega \frac{1}{2}\,|\nabla u|^2 - g\,u\,d(x,y) \;+\; \int_{\Gamma_2} \frac{1}{2}\alpha u^2 - \gamma_2 u\,dS,$$

wobei $V_\psi = \{w \in H^1(\Omega) \mid w = \psi \text{ auf } \Gamma_1\}$.

iii) $u = \bar{u} \in V_{\gamma_1}$ erfüllt

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v - g\,v\,d(x,y) \;+\; \int_{\Gamma_2} (\alpha u - \gamma_2) v\,dS \;=\; 0$$

für alle $v \in V_0$.

**Hinweise:**

1) Berechnen Sie für die Äquivalenz "ii) $\Leftrightarrow$ iii)" den Ausdruck

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} I(\bar{u} + \varepsilon v)\Big|_{\varepsilon=0}.$$

2) Für $v \in H^2(\Omega)$ und $w \in H^1(\Omega)$ gilt:

$$\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla w \, d(x,y) = -\int_\Omega \Delta v \, w \, d(x,y) + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial n} w \, dS,$$

wobei $n$ die *äußere Einheitsnormale* ist. Die Verallgemeinerung der Greenschen Formel für $H^1$-Funktionen ist **nicht zu beweisen** und kann so verwendet werden.

## Aufgabe 4.3 **(Programm - 8 Punkte)**

Diese Aufgabe soll einen Einstieg in nützliche Applikationen zur Lösung von partiellen Differentialgeichungen geben. In Matlab empfehlen wir die *PDE Toolbox* und in Python the Package *FEniCS*. Wir betrachten dazu die folgende Problemstellung

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \frac{1}{10}(x^2 + y^2) \quad && \text{in } \Omega, \\ u &= 1, && \text{auf } \Gamma_1, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 && \text{auf } \Gamma_2. \end{aligned} \tag{3}$$

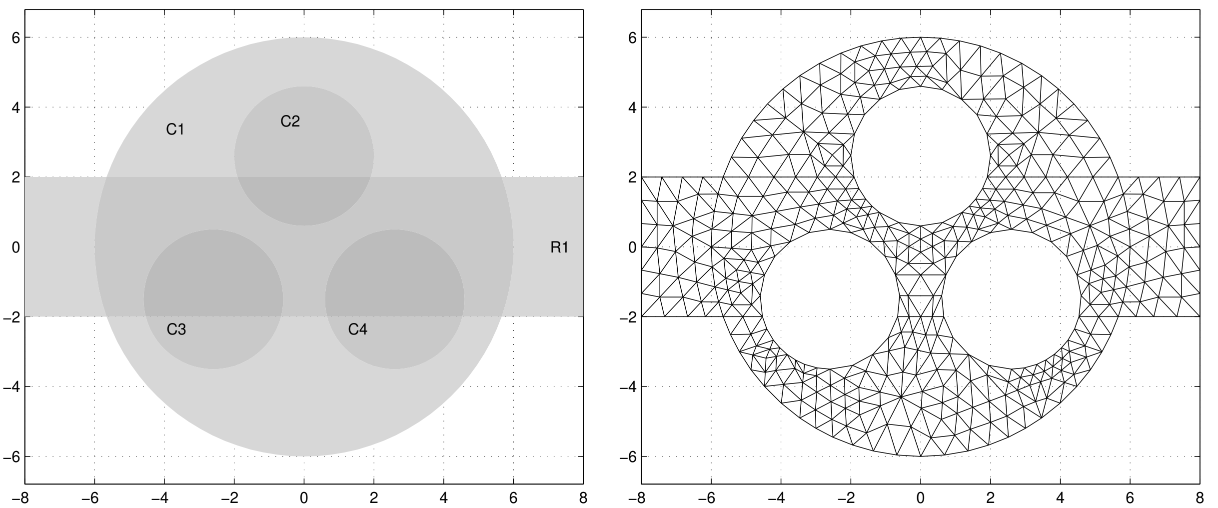
für das Gebiet $\Omega \subset^2$,

$$\Omega := \Big( ((-8,8) \times (-2,2)) \cup K_6((0,0)) \Big) \setminus \Big( \overline{K}_2((0,a)) \cup \overline{K}_2((-a,-b)) \cup \bar{K}_2((a,-b)) \Big),$$

und den Rändern

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \partial\Big( ((-8,8) \times (-2,2)) \cup K_6((0,0)) \Big), \\ \Gamma_2 &= \partial\Big( \bar{K}_2((0,a)) \cup \bar{K}_2((-a,-b)) \cup \bar{K}_2((a,-b)) \Big), \end{aligned}$$

mit $a = 3\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$, $b = 3\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$. Hierbei bezeichnen $K_r((x,y))$ und $\overline{K}_r((x,y))$ den *offenen* bzw. *abgeschlossenen Kreis* um den Punkt $(x,y)$ mit Radius $r > 0$, siehe Abbildung 1. Lösen Sie (3) auf $\Omega$ mittels der Methode der Finiten Elemente in der PDE Toolbox in Matlab oder in Python in FEniCS. Visualisieren Sie ihre Ergebnisse.




(a) Draw.

(b) Mesh und Refinement.

Abbildung 1: Gebiet $\Omega$.