Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statsitik
Johannes Schropp
Jan Rohleff

Wintersemester 2024/2025

Numerik partieller Differentialgleichungen I

https://www.math.uni-konstanz.de/~rohleff/numpde1.html

6. Übungsblatt

Ausgabe: 30.01.2025, Abgabe: 06.02.2025

Aufgabe 6.1 (Theorie - 6 Punkte)

Seien $\Delta t = T/N$, $\Delta x = 1/M > 0$, und es sei $u = (u_i^j)_{0\le i\le M,\,0\le j\le N}$ eine Gitterfunktion. Es gelte

$$\frac{1}{\Delta t}(u_i^j - u_i^{j-1}) \le \frac{1}{\Delta x^2}(u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j), \quad i = 1,\dots,M-1,\ \ j = 1,\dots,N.$$

Zeigen Sie, dass $u = (u_i^j)_{0\le i\le M,\,0\le j\le N}$ sein Maximum auf einer der Mengen $\{(i,0);\ i = 0,\dots,M\}$, $\{(k,j);\ k \in \{0,M\},\ j = 0,\dots,N\}$ annimmt (*diskretes parabolisches Maximumprinzip*).

Aufgabe 6.2 (Programm - 12 Punkte)

Gegeben sei die im Ort eindimensionale hyperbolische *Wellengleichung*

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2\, u_{xx} && \text{in } \Omega\times[0,T],\\ u(x,0) &= u_0(x), && \text{in } \Omega,\\ u_t(x,0) &= u_1(x), && \text{in } \Omega,\\ u(a,t) &= \gamma_a(t) && \text{in } [0,T],\\ u(b,t) &= \gamma_b(t) && \text{in } [0,T], \end{aligned} \tag{1}$$

für $\Omega = [a,b]$ auf dem diskreten Ort-Zeit-Gitter

$$\Omega_h = \{(i\Delta x, j\Delta t)\ \mid i = 1,\dots,M-1,\ j = 0,\dots,N\},$$
$$\Delta x = \frac{b-a}{M},\quad \Delta t = \frac{T}{N},\quad h = (\Delta x, \Delta t),$$

mit $u_i^j = u(i\Delta x, j\Delta t)$ und $v^j = \left(u_1^j,\dots,u_{M-1}^j\right)$ für $j = 1,\dots,N$. Implementieren Sie für (1) das folgende $\vartheta-$Verfahren:

$$\left(\frac{1}{\Delta t^2}I + \vartheta\Gamma\right)v^{j+1} = \frac{1}{\Delta t^2}\left(2v^j - v^{j-1}\right) + \vartheta r^{j+1} + (1-2\vartheta)\left(-\Gamma v^j + r^j\right) + \vartheta\left(-\Gamma v^{j-1} + r^{j-1}\right)$$

für $j = 1,\dots,N-1$, mit den Startdaten

$$v^0 = \left(u_0(x_1),\dots,u_0(x_{M-1})\right),$$
$$\frac{1}{\Delta t}(v^1 - v^0) = \left(u_1(x_1),\dots,u_1(x_{M-1})\right) + \frac{\Delta t}{2}c^2\ \left(u_0''(x_1),\dots,u_0''(x_{M-1})\right),$$

und

$$\Gamma = \frac{c^2}{\Delta x^2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad r^j = \frac{c^2}{\Delta x^2}\begin{pmatrix} \gamma_a(t_j) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \gamma_b(t_j) \end{pmatrix}.$$

Betrachten Sie folgendes Setting:

$$a = 0, b = 1, \qquad T = 2, \qquad c = 1.0,$$
$$u_0(x) = \sin(\pi x), \qquad u_1(x) = 0, \qquad \gamma_0(t) = \gamma_1(t) = 0.$$

a) Lösen Sie (1) mit dem ϑ-Verfahren für $\vartheta = \frac{1}{2}$ und $M = 100$, $N = 500$. Plotten Sie dabei die Lösung für jeden diskreten Zeitschritt in $[0, T]$ in ein x-$u(x,t)$-Schaubild. **Hinweis:** Hier können die Befehle **hold on/hold off** und **clf** hilfreich sein.

b) Schätzen Sie die Konvergenzordnung p des Verfahrens für $\vartheta = 0$, indem Sie den Fehler

$$\varepsilon(h) = \|u_h - \bar{u}\|_{2,\infty} \tag{2}$$

in der Norm

$$\|w\|_{2,\infty} := \max\left\{ \left(\Delta x \sum_{i=1}^{M-1} (w_i^j)^2\right)^{1/2} \,\middle|\, j = 0, ..., N \right\}, \quad w \in \mathbb{R}^{\Omega_h}, \tag{3}$$

in Abhängigkeit der Schrittweite $h = (\Delta x, \Delta t)$ berechnen. Dabei sind u_h und $\bar{u}$ die numerische und exakte Lösung der Wellengleichung (1). Gehen Sie hierbei folgendermaßen vor:

1. Wählen Sie für $M \in \mathcal{M} = \{10, 20, 40, 80\}$ jeweils ein dazu passendes N_M für die Zeitdiskretisierung durch
$$N_M = 4\,c\,M.$$
Dies sichert die Gültigkeit der sogenannten *CFL-Bedingung*: $\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{1}{c}$.
2. Berechnen Sie für jedes
$$h_M = (\Delta x_M, \Delta t_M) = \left(\frac{b-a}{M}, \frac{T}{N_M}\right), \quad M \in \mathcal{M} = \{10, 20, 40, 80\},$$
die numerische und exakte Lösung, als auch den dazugehörigen Fehler $\varepsilon(h_M)$.
3. Schätzen Sie die Konvergenzordnung p des Verfahrens unter Verwendung des berechneten Fehlers $\varepsilon(h_M)$ mit der Formel
$$p \approx \frac{\log(\varepsilon(h_M))}{\log(h_M)} \tag{4}$$
für $M \in \mathcal{M} = \{10, 20, 40, 80\}$.

Hinweis: Die exakte Lösung zu (1) ist durch folgende *Formel von d'Alembert* gegeben:

$$\bar{u}(x,t) = \frac{1}{2}(u_0(x+ct) - u_0(x-ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} u_1(s)\, ds. \tag{5}$$