Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statsitik
Johannes Schropp
Jan Rohleff

Sommersemester 2024

Numerik partieller Differentialgleichungen II

`https://www.math.uni-konstanz.de/~rohleff/numpde2.html`

2. Übungsblatt

Ausgabe: 15.04.2024, Abgabe: 22.04.2024, bis 10.00 Uhr

Aufgabe 2.1 (Theorie - 6 Punkte)

Für $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ sei $P_r(\Gamma) := \{u : \Gamma \to \mathbb{R} : u \text{ ist ein Polynom mit } \deg(u) = r\}$ der Raum der Polynome in zwei Variablen von Grad r. Zeigen Sie: Die Menge $\left\{x^k y^l\right\}_{0 \leq k+l \leq r}$ bildet eine Basis von $P_r(\Gamma)$ und es gilt

$$\dim\left(P_r(\Gamma)\right) = \frac{(r+1)(r+2)}{2}.$$

Aufgabe 2.2 (Theorie - 6 Punkte)

Die Punkte $p^1 = (0,0)$, $p^2 = (1,0)$, $p^3 = (1,1)$, $p^4 = (0,1)$ beschreiben die Ecken eines Referenzquadrats $\mathcal{Q}$. Die Basisfunktionen mit entsprechender Nummerierung lauten

$$\begin{aligned} f_1(x_1,x_2) &= (1-x_1)(1-x_2) \\ f_2(x_1,x_2) &= x_1(1-x_2) \\ f_3(x_1,x_2) &= x_1 x_2 \\ f_4(x_1,x_2) &= (1-x_1)x_2. \end{aligned}$$

Berechnen Sie die affine Transformation R von $\mathcal{Q}$ auf

$$\tilde{\mathcal{Q}} := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \ -1 \leq x_1 + x_2 \leq 1,\ -1 \leq x_2 - x_1 \leq 1\}$$

und geben Sie die Basisfunktionen $\tilde{f}_i := f_i \circ R^{-1}$ auf $\tilde{\mathcal{Q}}$ an.

Aufgabe 2.3 (Programm - 9 Punkte)

Vorgelegt sei die Poisson-Gleichung

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega = (-1,1)^2, \qquad u(x,y) = x^2 + y^2 \quad \text{auf } \partial\Omega$$

mit der rechten Seite $f(x,y) = 2\pi^2 \sin(\pi x)\sin(\pi y) - 4$ für $(x,y) \in \Omega$.

(i) Lösen Sie dieses Problem mit Matlab/Python für für verschiedene Gitterdiskretisierungen $h = 0.3, 0.25, 0.2, 0.15, 0.1$.

(ii) Führen Sie mit den erhaltenen Daten aus (i) eine Konvergenzanalyse in der L^∞-Norm durch, in dem Sie jeweils den Fehler

$$e_h := \|u_{ex} - u_h\|_{L^\infty}$$

für alle h berechnen. Dabei ist u_h die numerische und u_{ex} die exakte Lösung; letztere ist durch $u_{ex}(x, y) = \sin(\pi x)\sin(\pi y) + x^2 + y^2$ gegeben. Geht man für ein $C > 0$ von der Beziehung

$$e_h = Ch^p$$

aus, so kann mittels der Umformung

$$\ln(e_h) = \ln(C) + p\ln(h)$$

die Steigung p der Ausgleichsgeraden durch die Punkte $(\ln(h), \ln(e_h))$ für $h = 0.3, 0.25, 0.2, 0.15, 0.1$ ermittelt werden. Tragen Sie diese Punkte samt der Ausgleichsgeraden in ein Schaubild ein.. Geben Sie die Konvergenzordnung p auf der Konsole aus.

(iii) Zeichnen Sie zum Schluss noch die Triangulierung und die Lösung u_h für $h = 0.1$ jeweils in ein eigenes Schaubild ein.