Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statsitik
Johannes Schropp
Jan Rohleff

Sommersemester 2024

Numerik partieller Differentialgleichungen II

https://www.math.uni-konstanz.de/~rohleff/numpde2.html

4. Übungsblatt

Ausgabe: 29.04.2024, Abgabe: 06.05.2024, bis 10.00 Uhr

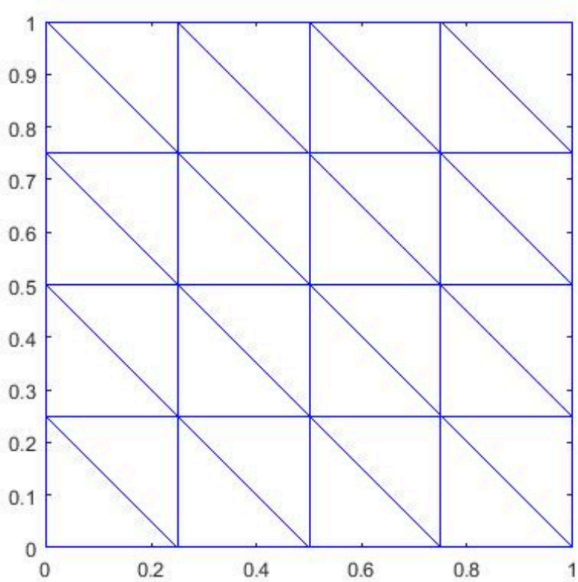
Aufgabe 4.1 (Theorie - 12 Punkte)

Gegeben sei das zweidimensionale Dirichlet-Problem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= g \quad \text{in} \quad \Omega = (0,1)^2, \\ u &= 0 \quad \text{auf} \quad \partial\Omega \end{aligned} \tag{1}$$

mit konstanter rechter Seite $g = k$, $k \in \mathbb{R}$.

Betrachten Sie für Ω die Friedrichs-Keller-Triangulierung (siehe Abbildung für den Fall $N = 32$) mit der Knotenverteilung $p_1, \dots, p_N$.

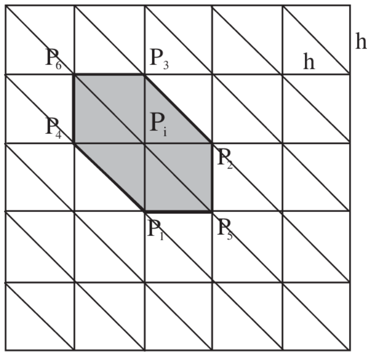


Leiten Sie für lineare Ansatzfunktionen (lineare Finite-Elemente) für die angegebene Triangulierung das Gleichungssystem

$$Ac = r, \quad A \in \mathbb{R}^{N\times N}, \quad c, r \in \mathbb{R}^N$$

aus der Vorlesung für beliebiges quadratisches N her ($N = n^2$ für $n \in \mathbb{N}$).

Beachten Sie zur Aufstellung des Gleichungssystems folgende Punkte:



1. Der Träger einer Basisfunktion u_i ist in folgendem Bild dargestellt (grau hinterlegt):

   Dies ist ein Ausschnitt der Triangulierung des Gebietes Ω zur Basisfunktion u_i. Machen Sie sich damit klar, welche Einträge der Matrix A in Bezug auf obige Beispielnummerierung des Gebietes von Null verschieden sind, d. h. für welche Indizes $i, j \in \{1, \ldots, N\}$ sind die Integrale

   $$A_{ij} = \int_\Omega \nabla u_j \cdot \nabla u_i \, d(x, y)$$

   ungleich Null? Diese sind dann zu berechnen.

2. Da g konstant ist, gilt für den Vektor r

   $$r_i = \int_\Omega g u_i \, d(x, y) = k \int_\Omega u_i \, d(x, y)$$

   für $i = 1, \ldots, N$.

Hinweise und Bemerkungen:

- Nutzen Sie die Symmetrie der Triangulierung aus.
- Zur Kontrolle sind für gegebenes h^* die Einträge der Matrix A und der rechten Seite r angegeben. Es gilt $A_{ii} = 4$; die restlichen Einträge von A, die nicht Null sind, haben den Wert -1. Für r gilt $r_i = k(h^*)^2$ für alle i.

Aufgabe 4.2 (Programm - 9 Punkte)

Lösen Sie in Matlab/Python das Problem (1) (Aufgabe 1, Blatt 3) mittels der Methode der finiten Elemente unter Verwendung von linearen Ansatz-Funktionen. Verwenden Sie dazu die Ergebnisse aus Aufgabe 1 (Blatt 3) und setzen Sie $\lambda = 1$ sowie $f = 2$.

Gehen Sie dazu wie folgt vor:

1. Implementieren Sie in Matlab/Python die Funktionen

   `[p,d] = integratephi(xp,i,j)`,
   `[r] = integraterhs(xp,i,k)`,

   die als Rückgabe die folgenden Integrale berechnen: `p` $= P_{ij}$, `d` $= D_{ij}$ und `r` $= r_i$. Als Eingabeargumente akzeptieren die Funktionen eine **beliebige(!)** Diskretisierung des Intervalls Ω in Form des Vektors `xp`, die Indizes `i` und `j` der beiden zur Integralberechnung benötigten Funktionen φ_i und φ_j sowie eine Konstante `k` für konstante rechte Seiten $f(x) = k$.

2. Schreiben Sie ein Matlab/Python-File, in dem Sie diese Funktionen zur Belegung der Verfahrensmatrix A und der rechten Seite r aufrufen und damit die Problemstellung aus Aufgabe 2 für eine **äquidistante** sowie eine **zufällige** Diskretisierung von Ω lösen (Tipp: siehe Matlab-Funktionen `rand` und `sort`, Python-Funktionen: `numpy.random.rand` und `numpy.sort`). Plotten Sie die Lösungen in geeignete x-$u(x)$-Diagramme.

3. Lösen Sie Gleichung (1) (Aufgabe 1, Blatt 3) ebenfalls mittels dem Verfahren der *zentralen Finite-Differenzen* für eine äquidistante Schrittweite h. Vergleichen Sie die erhaltene FD-Lösung mit der zugehörigen FE-Lösung. Was passiert im Fall $\lambda = 0$? Hinweis: Betrachten Sie die jeweiligen Approximationen für u'', u und f.

Halten Sie Ihre Ergebnisse in einem numerischen Report fest.