Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statsitik
Johannes Schropp
Jan Rohleff

Sommersemester 2024

Numerik partieller Differentialgleichungen II

https://www.math.uni-konstanz.de/~rohleff/numpde2.html

6. Übungsblatt

Ausgabe: 13.05.2024, Abgabe: 20.05.2024, bis 10.00 Uhr

Aufgabe 6.1 (Theorie - 6 Punkte)

Vorgelegt sei die nichtautonome Differentialgleichung

$$w'(t) \quad = \quad \lambda(t)w(t), \quad \lambda(t) \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(\lambda(t)) \leq 0 \text{ für } t \geq 0. \tag{1}$$

Ein s-stufiges Runge-Kutta-Verfahren mit Tableau $\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & b^T \end{array}$ heißt *nichtautonom-stabil*, falls für dessen Stabilitätsfunktion

$$R(\Gamma) \quad := \quad 1 + b^T\Gamma(I - A\Gamma)^{-1}\mathbb{I}$$

die Beziehung $|R(\Gamma)| \leq 1$ gilt für alle Matrizen $\Gamma = \mathrm{diag}(\gamma_1, \ldots, \gamma_s)$ mit $\mathrm{Re}(\gamma_i) \leq 0$, $i = 1, \ldots, s$. Zeigen Sie: Je zwei Lösungen $(y^m)_{m\in\mathbb{N}}$ und $(z^m)_{m\in\mathbb{N}}$ von nichtautonom-stabilen Runge-Kutta-Verfahren mit Schrittweite $\Delta t > 0$ angewandt auf die nichtautonome Testgleichung (1) erfüllen

$$|y^{m+1} - z^{m+1}| \quad \leq \quad |y^m - z^m|, \quad m \in \mathbb{N},$$

d. h. das Verfahren ist kontraktiv. Gilt überdies $|R(\Gamma)| < 1$, so folgt $\lim_{m\to\infty} y^m = 0$.

Aufgabe 6.2 (Theorie - 6 Punkte)

Gegeben sei die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\dot{x} = \lambda x, \quad \lambda \in \mathbb{C} \text{ mit } \mathrm{Re}(\lambda) < 0. \tag{2}$$

Bestimmen Sie die Stabilitätsfunktion $g = g_\vartheta$ des ϑ-Verfahrens und zeigen Sie die Beziehung

$$\mathbb{C}_- \subset S_\vartheta$$

für $\vartheta \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Dabei sind $\mathbb{C}_- := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) \leq 0\}$ die linke komplexe Halbebene und $S_\vartheta := \{z \in \mathbb{C} : |g_\vartheta(z)| \leq 1\}$ der Stabilitätsbereich des ϑ-Verfahrens.

Aufgabe 6.3 **(Programm - 9 Punkte)**

Lösen Sie die Aufgabe

$$
\begin{aligned}
u_t &= u_{xx} - \lambda \frac{u}{1+u}, \quad 0 < x < 1,\ 0 < t < T, \\
u(x,0) &= u_0(x) \ = \ 1, \quad 0 < x < 1, \\
u(0,t) &= u(1,t) \ = \ \exp\left(\frac{t}{1+t^2}\right), \quad 0 \le t \le T
\end{aligned}
\tag{3}
$$

in Matlab/Python für $\lambda = 50$ und $T = 5$ mittels des Liniensystems mit dem impliziten Euler-Cauchy-, dem Crank-Nicholson- sowie einem steifen BDF-Verfahren für $\Delta x = 0.01$.

(i) Implementieren Sie die ersten beiden Verfahren für $\Delta t = 0.01$. Verwenden Sie dabei zum Lösen der nichtlinearen Gleichungen das Newton-Verfahren, indem Sie dieses an der Lösung des vorigen Zeitlevels starten.

(ii) Benutzen Sie für das BDF-Verfahren die MATLAB-Routine `ode15s` oder die Pythonfunktion `scipy.integrate.BDF` .

(iii) Lösen Sie zum Schluss die Gleichung (3) mit dem BDF-Verfahren aus (ii) für $T = 1000$. Beobachten Sie die Konvergenz der Lösung gegen einen stationären Zustand für $t \to \infty$? Welche Gleichung erfüllt die Grenzfunktion?

Schreiben Sie einen Report mit Ihren Ergebnissen.