Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer, J. Vill
WS 2019/20

Universität Konstanz

Übungen zur Vorlesung Konvexität

Blatt 1

Abgabe:

Sei V stets ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Aufgabe 1
Sei $\dim(V) < \infty$, und sei $K \subseteq V$ eine konvexe Menge. Zeige $K^i = \operatorname{int}(K)$ und $K^a = \overline{K}$. (Hier sind K^i das algebraisch Innere und K^a der algebraische Abschluß von K, wie in der Vorlesung definiert.)

Aufgabe 2
Ist $\dim(V) < \infty$ und K eine dichte konvexe Teilmenge von V, so ist $K = V$. Gib ein Beispiel eines $\mathbb{R}$-Vektorraums V (mit $\dim(V) = \infty$) und einer konvexen Teilmenge $K \neq V$ von V an mit $K^a = V$.

Aufgabe 3
V habe eine abzählbar unendliche lineare Basis $\{v_i : i \geq 1\}$. Sei K die Menge aller (endlichen) Linearkombinationen $x = \sum_{i\geq 1} a_i v_i$ mit $x \neq 0$ derart, daß alle $a_i \geq 0$ sind und daß $\sum_{i\geq 1} a_i \geq \frac{1}{n(x)}$ ist, wobei $n(x)$ die Anzahl der von 0 verschiedenen a_i sei. Zeige:

(a) K ist konvex.
(b) $0 \notin K^a$, aber $0 \in (K^a)^a$.

Aufgabe 4
Seien $S_1, \ldots, S_{n+1} \subseteq \mathbb{R}^n$ Teilmengen, und sei $u \in \bigcap_{i=1}^{n+1} \operatorname{conv}(S_i)$. Dann gibt es Punkte $v_i \in S_i$ $(i = 1, \ldots, n+1)$ mit $u \in \operatorname{conv}(v_1, \ldots, v_{n+1})$.

Anleitung: Wähle $v_i \in S_i$ so, daß der Abstand von u zu $\operatorname{conv}(v_1, \ldots, v_{n+1})$ minimal wird (warum geht das?). Nimm an $u \notin \operatorname{conv}(v_1, \ldots, v_{n+1})$ und zeige, daß man dann den Abstand noch kleiner machen kann.