Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer, J. Vill
WS 2019/20

Übungen zur Vorlesung Konvexität

Blatt 2

Abgabe: Freitag 15. November 2019 um 13:00 Uhr

Sei V stets ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit $\dim(V) < \infty$.

Aufgabe 5

Sei $S := \{(x, y, 0)\colon x^2 + y^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^3$, sei $e := (1, 0, 1)$, $e' := (1, 0, -1)$, und sei $K \subseteq \mathbb{R}^3$ die konvexe Hülle der Menge $S \cup \{e, e'\}$.

(a) Bestimme $\dim(K)$ und zeige, daß K kompakt ist.
(b) Bestimme die Menge $Ex(K)$ der Extremalpunkte von K und zeige, daß $Ex(K)$ nicht abgeschlossen ist.
(c) Für jede abgeschlossene konvexe Menge im $\mathbb{R}^2$ ist die Menge ihrer Extremalpunkte abgeschlossen.

Aufgabe 6

Sei $K \neq \varnothing$ eine abgeschlossene konvexe Teilmenge von V. Genau dann hat K einen Extremalpunkt, wenn K keine Gerade enthält. (*Hinweis* zur schwierigeren Richtung: Betrachte eine nichtleere Seite von minimaler Dimension.)

Aufgabe 7

Sei $K \subseteq V$ eine nichtleere konvexe Menge, sei K^h ihre Homogenisierung. Dann ist $\dim(K^h) = \dim(K) + 1$.

Aufgabe 8

Sei $K \subseteq V$ eine **abgeschlossene** konvexe Menge, $K \neq \varnothing$.

(a) Für jede Seite $F \neq \varnothing$ von K ist $\mathrm{rc}(F)$ eine Seite von $\mathrm{rc}(K)$ und F^h eine Seite von K^h.
(b) Ist G eine Seite von K^h mit $G \not\subseteq V \times \{0\}$, so ist $F := G^d$ eine Seite von K, und es ist $G = F^h$.
(c) Es besteht eine inklusionstreue Bijektion zwischen den nichtleeren Seiten von K und den nicht in $V \times \{0\}$ enthaltenen Seiten von K^h.