Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer, J. Vill
WS 2019/20

## Übungen zur Vorlesung Konvexität

## Blatt 3

**Abgabe:** Freitag 29. November 2019 um 13:00 Uhr

Sei $V$ stets ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit $\dim(V) < \infty$.

**Aufgabe 9**

Sei $C \subseteq V$ ein abgeschlossener Kegel.

(a) $\operatorname{relint}(C^*) = \{\lambda \in C^* \colon \lambda > 0 \text{ auf } C \smallsetminus \operatorname{supp}(C)\}$.

(b) $\operatorname{supp}(C)$ ist eine exponierte Seite von $C$.

(c) Ist $\dim(\operatorname{span}(C)/\operatorname{supp}(C)) \geq 2$, so gibt es einen Vektor $0 \neq u \in \operatorname{span}(C)$ mit $C \cap \mathbb{R}u = \{0\}$.

**Aufgabe 10**

Sei $K \subseteq V$ eine kompakte Teilmenge. Es gebe eine Linearform $\lambda \in V^\vee$ mit $\lambda > 0$ auf $K$. Dann ist der konvexe Kegel $\operatorname{cone}(K)$ abgeschlossen und spitz.

**Aufgabe 11**

Sei $n \in \mathbb{N}$ gerade, sei $C_n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ definiert durch

$$C_n \;:=\; \operatorname{cone}\bigl\{(1, t, t^2, \dots, t^n) \colon t \in \mathbb{R}\bigr\},$$

und sei $M_n := C_n + \mathbb{R}_+(0, \dots, 0, 1)$.

(a) $M_n$ ist der Abschluß von $C_n$.

(b) $M_n$ ist linear isomorph zum dualen Kegel $\Sigma_n^*$ des Kegels $\Sigma_n$ aller Quadratsummen in $\mathbb{R}[x]$ vom Grad $\leq n$.

(*Hinweis*: Jedes Polynom $f \in \mathbb{R}[x]$ mit $f(a) \geq 0$ für alle $a \in \mathbb{R}$ ist eine Quadratsumme von Polynomen in $\mathbb{R}[x]$.)

**Aufgabe 12**

Sei $P \subseteq V$ ein Polyeder. Für jede nichtleere Seite $Q \neq P$ von $P$ gibt es eine Seite $F$ von $P$ mit $Q \subseteq F$ und $\dim(F) - \dim(Q) = 1$.