

## Übungen zur Vorlesung Konvexität

### Blatt 5

**Abgabe:** Freitag 10. Januar 2020 um 13:00 Uhr

Sei  $V$  stets ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit  $\dim(V) < \infty$ .

#### Aufgabe 17

Sei  $C \subseteq V$  ein abgeschlossener konvexer Kegel. Für jede Seite  $F$  von  $C$  sei  $F' := \{\alpha \in C^* : \alpha|_F = 0\}$ . Zeige:

- $F'$  ist eine exponierte Seite von  $C^*$ , und es gilt  $\dim(F) + \dim(F') \leq \dim(V)$ .
- $F \mapsto F'$  ist eine Bijektion zwischen den Mengen der nichtleeren exponierten Seiten von  $C$  und von  $C^*$ .

#### Aufgabe 18

Verwende die Bezeichnungen aus Aufgabe 17.

- Ist der Kegel  $C$  ein Polyeder, so gilt  $\dim(F) + \dim(F') = \dim(V)$  für jede Seite  $F$  von  $C$ .
- Gib ein Beispiel eines abgeschlossenen konvexen Kegels  $C \subseteq V$  und einer exponierten Seite  $F$  von  $C$  an mit  $\dim(F) + \dim(F') < \dim(V)$ .

#### Aufgabe 19

Für  $A \in \text{Sym}_n(\mathbb{R})$  sei  $K_A \subseteq \text{Sym}_n(\mathbb{R})$  die konvexe Hülle aller Matrizen  $SAS^t$  mit  $S \in O(n)$ . Berechne die Dimension von  $K_A$  in Abhängigkeit von  $A$ .

#### Aufgabe 20

Sei  $A \in \text{Sym}_n(\mathbb{R})$ , sei  $K_A$  wie in Aufgabe 19, und sei  $\lambda = \lambda_A$  der Vektor der Eigenwerte von  $A$ . Für jede Seite  $P$  von  $\Pi_\lambda$  sei  $F_P := K_A \cap D^{-1}(P)$ .

- $F_P$  ist eine Seite von  $K_A$ .
- Für jede Seite  $F$  von  $K_A$  gibt es  $S \in O(n)$  und eine Seite  $P$  von  $\Pi_\lambda$  mit  $F = \{SXS^t : X \in F_P\}$ .

*Hinweis:* In (b) kann verwendet werden, daß jede Seite von  $K_A$  exponiert ist (das zeigen wir später).

**Frohe Weihnachten und ein gutes Neues Jahr!**