Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer, J. Vill
WS 2019/20

Übungen zur Vorlesung Konvexität

Blatt 6

Abgabe: Freitag 24. Januar 2020 um 13:00 Uhr

Aufgabe 21

Für $A \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ sind äquivalent:

(i) A ist (positiv oder negativ) semidefinit;

(ii) $S = \{x \in \mathbb{R}^n : x^t A x \leq 1\}$ ist ein Spektraeder.

Hinweis: Berechne die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ x_n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 22

Sei $A \in \mathsf{S}^d$, und sei $0 \leq c \leq d$ eine reelle Zahl. Seien $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_d$ die Eigenwerte von A. Bestimme

$$\min\Big\{\mathrm{tr}(AX) \colon X \in \mathsf{S}^d,\ \mathrm{tr}(X) = c,\ 0 \preceq X \preceq I\Big\}.$$

Aufgabe 23

Sei $m \leq n$ und $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, seien $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_m \geq 0$ die Eigenwerte von AA^t. Für $i = 1, \ldots, m$ heißt $\sigma_i(A) := \sqrt{\lambda_i} \geq 0$ der i-te singuläre Wert von A. Für $k = 1, \ldots, m$ setze $||A||_k := \sigma_1(A) + \cdots + \sigma_k(A)$.

(a) Die Eigenwerte von $\widetilde{A} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & A \\ A^t & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathsf{S}^{m+n}$ sind $\pm\sqrt{\lambda_i}$ $(i = 1, \ldots, m)$, sowie $(n-m)$-mal der Eigenwert 0.

(b) Für beliebige $A, B \in \mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ gilt $||A + B||_k \leq ||A||_k + ||B||_k$.

Aus (b) folgt, daß $||\cdot||_k$ eine Vektorraumnorm auf $\mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ ist.

Aufgabe 24

Sei $E \subseteq \mathbb{R}^3$ das Elliptop aller $x \in \mathbb{R}^3$ mit

$$A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ x_1 & 1 & x_3 \\ x_2 & x_3 & 1 \end{pmatrix} \succeq 0.$$

Bestimme alle positiv-dimensionalen Seiten von E.