Universität Konstanz *SS 2024*
Fachbereich Mathematik und Statistik
J. Schropp

Übungen zu
Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler II

https://www.math.uni-konstanz.de/∼schropp/wiwimathss.html

Klausurvorbereitung

Aufgabe 1

Vorgelegt sei die parameterabhängige Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 5-t \\ 4 & 0 & 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}.$$

Bestimmen Sie den Rang von A in Abhängigkeit von t.

Aufgabe 2

Es seien $p, q \in \mathbb{R}$. Ferner sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2q, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 4q, \\ 3x_1 - 2x_2 + px_3 &= q \end{aligned}$$

gegeben. Für welche Werte von p und q hat das System eine eindeutige Lösung, viele Lösungen oder gar keine Lösung?

Aufgabe 3

Besitzt die Funktion

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{3}x_1^3 + x_1x_2 - 2x_1x_3 + 3x_2^2 - x_2x_3 + x_3^2$$

relative Extrema an den Stellen

$$P^1 = (0,0,0), \qquad P^2 = (2,0,2), \qquad P^3 = (3,1,5)?$$

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass das System

$$\begin{aligned} x_1^2 - x_2^2 + y_1y_2 - y_2^2 + 3 &= 0, \\ x_1 + x_2^2 + y_1^2 + 2y_1x_1 &= 0 \end{aligned}$$

an der Stelle $(x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0) = (2, 1, -1, 2)$ lokal nach (y_1, y_2) auflösbar ist. Für die auflösende Funktion φ berechne man $\varphi'(x_1^0, x_2^0)$.

Aufgabe 5

a) Bestimmen Sie mögliche relative Extrema von

$$f(x_1, x_2, x_3) \;=\; 2x_1 + 3x_2 + 2x_3$$

unter den Nebenbedingungen

$$x_1^2 + x_2^2 \;=\; 4, \qquad x_1 + x_3 \;=\; 1.$$

b) Überprüfen Sie bei allen stationären Punkte x^* der Lagrangefunktion mit $x_i^* \geq 0$, $i = 1, 2, 3$ auch die hinreichenden Bedingungen für lokale Extrema.

Aufgabe 6

Bestimmen Sie lokale Maxima von

$$f(x_1, x_2) \;=\; x_1 x_2$$

unter den Nebenbedingungen

$$x_1 + 2x_2 \;\leq\; 2, \qquad x_i \;\geq\; 0, \;\; i = 1, 2.$$

Aufgabe 7

Bestimmen Sie die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$x'(t) \;=\; \frac{x(t)^2 - 1}{a x(t)}, \;\; a \neq 0, \qquad x(0) \;=\; 2.$$

Aufgabe 8

Vorgelegt sei das Differentialgleichungssystem

$$x'(t) \;=\; \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x(t) \;+\; \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

a) Berechnen Sie die allgemeine Lösung von (1) (die Eigenvektoren dürfen in der zweiten Komponente auf 1 normiert werden).
b) Wie lautet die Lösung von (1) zum Anfangswert $x(0) = (1, 2)^T$?

Lösungen

Aufgabe 1: $Rang(A) = 3$ für $t \neq 1$, $Rang(A) = 2$ für $t = 1$.
Aufgabe 2: Eindeutige Lösung, falls $p \neq 3$. Ist $p = 3$, so erhält man viele Lösungen für $q = 0$ und keine Lösung für $q \neq 0$.

Aufgabe 3: P^3 erfüllt die notwendigen Bedingungen erster Ordnung nicht, P^1 ist ein Sattelpunkt und P^2 ein relatives Minimum.
Aufgabe 4: Der Satz über implizite Funktionen ist anwendbar und sichert die Auflösbarkeit. Es gilt

$$\varphi'(2,1) \quad = \quad \begin{pmatrix} 0.5 & -1 \\ 1 & -0.8 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5: a) $x^1 = (0,2,1)$, $\lambda^1 = (-0.75,-2)$ und $x^2 = (0,-2,1)$, $\lambda^2 = (0.75,-2)$.
b) x^1 ist ein relatives Maximum.
Aufgabe 6: $x^* = (1,0.5)$, $\mu^* = (0.5,0,0)$ ist ein relatives Maximum.
Aufgabe 7:

$$\bar{x}(t) \quad = \quad \sqrt{1+3\,\exp(2t/a)}.$$

Aufgabe 8: a)

$$\bar{x}(t) \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_1\,\exp(t)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\,\exp(-3t)\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

b) $c_1 = c_2 = 0.5$ in a).