FB MATHEMATIK UND STATISTIK
UNIVERSITÄT KONSTANZ
J. Schropp

SS 2023
11.10.2023

Nachklausur zu
Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler II

- Zur Bearbeitung der Klausur sind 90 Minuten vorgesehen. Zugelassene Hilfsmittel sind das Skript auf der Website der Vorlesung, sowie ein persönlich handbeschriebenes DIN A4 Blatt. Alle weiteren Hilfsmittel wie z.B. Smartwatches, Smartphones, Tablets oder Taschenrechner sind verboten.
- Die Klausur besteht aus 3 Aufgaben. Für jede Aufgabe gibt es 14 Punkte. **Jede Antwort ist zu begründen.**
- Es wird nicht nur das Endergebnis, sondern auch Lösungswege und Zwischenschritte bewertet. Geben Sie daher bei jeder Aufgabe alle Zwischenschritte an.
- **Versehen Sie bitte jedes von Ihnen benutzte Blatt mit Ihrer Matrikelnummer.** Für jede Aufgabe ist eine neue Seite anzufangen. Es empfiehlt sich selbstverständlich, mit der Aufgabe zu beginnen, die einem am einfachsten erscheint.
- Füllen Sie bitte dieses Deckblatt in deutlicher Blockschrift aus, und geben Sie es am Ende der Klausur zusammen mit Ihren Lösungen ab.
- Alle Mitarbeiter/innen der Vorlesung wünschen Ihnen gutes Gelingen und viel Erfolg!

MATRIKELNUMMER:

PRÜFUNGSRAUM:

Hiermit stimme ich der Veröffentlichung meines Klausurergebnisses ohne Nennung des Namens zu.

____________________________________ (Unterschrift)

1	2	3

Gesamtpunktzahl:	
Note:	

FB MATHEMATIK UND STATISTIK
UNIVERSITÄT KONSTANZ
J. Schropp

SS 2023
11.10.2023

Nachklausur zu
Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler II

Aufgabe 1 14 Punkte

a) Vorgelegt sei ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{R}^{4,4}$ und $x, b \in \mathbb{R}^4$. Weiter existiere $v \in \mathbb{R}^4 \backslash \{0\}$ mit $Av = 0$. Was kann aus diesen Informationen über $det(A)$ und $rg(A)$ gefolgert werden? Was kann über die Lösbarkeit und die Anzahl der Lösungen von $Ax = b$ gesagt werden, falls $rg(A|b) = 4$?

b) Begründen Sie, ob die folgenden Aussagen wahr sind oder geben Sie ein Gegenbeispiel an:

- Für jede Matrix $D \in \mathbb{R}^{N,N}$ ist die Matrix $D^T D$ symmetrisch.
- Jede Matrix $E \in \mathbb{R}^{N,N}$ mit Eigenwert 0 ist nicht invertierbar.

c) Vorgelegt sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}, \; t \geq 0.$$

Bestimmen Sie den Kern, Rang und die Determinante von A, d.h. $Ker(A)$, $rg(A)$ und $det(A)$ in Abhängigkeit von t.

Aufgabe 2 14 Punkte

a) Es sei $\beta > 0$. Bestimmen Sie alle möglichen relativen Extrema von

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2^3 (x_3 - 1) = \max., \quad x_i > 0, \; i = 1, 2, 3 \tag{1}$$

unter der Nebenbedingung $g(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3 - 1 - \beta = 0$. Warum sind an jedem möglichen relativen Extrema von (1) die Gradienten von f und g linear abhängig?

b) Ein Landwirt bewirtschaftet ein Grundstück von 12 Hektar Größe mit Rüben und Weizen. Er kann 3000 Euro einsetzen. Pro Hektar betragen seine Anbaukosten bei Rüben 200 Euro und bei Weizen 300 Euro. Der Reingewinn bei Rüben sei 1000 Euro pro Hektar, bei Weizen sei er 1200 Euro pro Hektar. Erstellen Sie die zugehörige mathematische Optimierungsaufgabe.

Aufgabe 3 14 Punkte

a) Vorgelegt sei die Anfangswertaufgabe

$$x'(t) - \frac{1}{t} x(t) = t \sin(t), \quad t \geq \frac{\pi}{2}, \quad x(\frac{\pi}{2}) = 0. \tag{2}$$

Geben Sie ohne Berechnung der Lösung von (2) die Größe $x'(\frac{\pi}{2})$ an. Berechnen Sie die Lösung $\bar{x}(t)$ der Anfangswertaufgabe (2).

b) Berechnen Sie die Funktionalmatrix der Abbildung

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + y^2 \cos(2z) \\ (z - y) \sin(2z) + 2y \end{pmatrix}, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Berechnen Sie, falls möglich, den Rang und die Determinante der Funktionalmatrix von F für $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.