Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
S. Burgdorf, M. Serra
Sommersemester 2019

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Blatt 10

Thema der Präsenzaufgabe
Der Ring $\mathbb{Z}$ und seine Hauptideale

Aufgabe 32 *(4 Punkte)*
Wir betrachten die beiden folgenden quadratischen Formen auf $\mathbb{R}^2$:

$$q_1\colon (x_1, x_2) \mapsto x_1 x_2,$$
$$q_2\colon (x_1, x_2) \mapsto x_1^2.$$

Zeigen Sie, dass es keine Basis von $\mathbb{R}^2$ gibt, bezüglich derer sowohl die Darstellungsmatrix von q_1 als auch die Darstellungsmatrix von q_2 Diagonalgestalt haben.

Aufgabe 33 *(2 Punkte)*
Sei X eine Menge, sei $\mathcal{P}(X)$ die Potenzmenge von X. Für A, $B \in \mathcal{P}(X)$ sei

$$A + B \;:=\; (A \cup B) \setminus (A \cap B), \quad A \cdot B \;:=\; A \cap B.$$

Zeigen Sie, dass $(\mathcal{P}(X), +, \cdot)$ ein kommutativer Ring mit Eins ist.

Aufgabe 34 *(2 Punkte)*
Sei $f\colon Y \to X$ eine Abbildung von Mengen, und sei $\varphi\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$ die durch

$$\varphi(A) \;:=\; f^{-1}(A) \quad (A \in \mathcal{P}(X))$$

definierte Abbildung. Zeigen Sie, dass φ ein Ringhomomorphismus und $\ker(\varphi)$ ein Hauptideal von $\mathcal{P}(X)$ ist.

Aufgabe 35* *(4 Punkte)*
Sei A ein kommutativer Ring mit Eins und seien $I, J \subset A$ Ideale. Zeigen Sie, dass die folgenden Menge ebenfalls Ideale von A sind:

(i) $I \cap J$;
(ii) $I + J := \{a + b\colon a \in I,\, b \in J\}$;
(iii) $IJ := (\{ab\colon a \in I,\, b \in J\})$.

Zeigen Sie außerdem, dass $IJ = \{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\colon n \in \mathbb{N},\, a_i \in I,\, b_i \in J,\, i = 1, \ldots, n\}$ gilt.

Abgabe: Bis Freitag, den 21.6.2019, 9:45 Uhr, in die Briefkästen auf F4.

Webseite: `http://math.uni-konstanz.de/~serra/2019-SS-LinAlg2` und ILIAS