Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
S. Burgdorf, M. Serra
Sommersemester 2019

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Blatt 11

Thema der Präsenzaufgabe
maximale Ideale

Aufgabe 36 *(4 Punkte)*

Sei A ein kommutativer Ring und $I \neq A$ ein Ideal von A. Zeigen Sie, dass es ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$ von A mit $I \subset \mathfrak{m}$ gibt. Folgern Sie, dass ein Element $a \in A$ genau dann eine Einheit von A ist, wenn für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von A gilt $a \notin \mathfrak{m}$.
Hinweis: Zornsches Lemma (Lemma 4.2.8, Lineare Algebra I)

Aufgabe 37 *(2 Punkte)*

Sei K ein Körper. Geben Sie alle irreduziblen Polynome in
- (i) $\mathbb{C}[X]$
- (ii) $\mathbb{R}[X]$

an und beweisen Sie Ihre Behauptung. Sie dürfen hierfür den Fundamentalsatz der Algebra sowie elementare Kenntnisse aus der Analysis verwenden.

Aufgabe 38 *(3 Punkte)*

- (i) Finden Sie einen ggT der Elemente $a = 572019$ und $b = 910275$. Stellen Sie diesen als Linearkombination von a und b dar.
- (ii) Finden Sie jeweils einen ggT der angegebenen Elemente in $\mathbb{Q}[X]$:
  - (a) $15X^4 + 8X^3 + 2X,\ X^3 - X,\ 5X^2 + 3X$;
  - (b) $X^{21} - X^{20} - 3X^{19} + 2X^{18} + 2X^{17} - X^{16} - 3X^{15} + 2X^{14} + X^{13}, X^8 - 1$.

Aufgabe 39 *(3 Punkte)*

Die Menge $\mathbb{Z}[i] := \{a+bi : a,\, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$ bildet mit den üblichen Verknüpfungen in $\mathbb{C}$ einen nullteilerfreien kommutativen Ring mit Eins (dies braucht nicht bewiesen zu werden). Zeigen Sie: $\mathbb{Z}[i]$ ist ein euklidischer Ring mit euklidischer Wertefunktion $\delta(a) := |a|^2$ für $0 \neq a \in \mathbb{Z}[i]$.

Hinweis: Begründen Sie zunächst, warum es für jedes $z \in \mathbb{C}$ ein $q \in \mathbb{Z}[i]$ mit $|q - z|^2 \leq \frac{1}{2}$ gibt. Benutzen Sie dies, um eine Division mit Rest in $\mathbb{Z}[i]$ durchzuführen.

Abgabe: Bis Freitag, den 28.6.2019, 9:45 Uhr, in die Briefkästen auf F4.

Webseite: `http://math.uni-konstanz.de/~serra/2019-SS-LinAlg2` und ILIAS