Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
S. Burgdorf, M. Serra
Sommersemester 2019

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Blatt 12

Thema der Präsenzaufgabe
Chinesischer Restsatz

Aufgabe 40* (*4 Punkte*)
Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, und sei $\varphi\colon \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ die durch $\varphi(f) := f(0) + n\mathbb{Z}$ ($f \in \mathbb{Z}[X]$) definierte Abbildung. Beweise:

(a) φ ist ein surjektiver Ringhomomorphismus,
(b) $\ker(\varphi) = (n, X)$,
(c) $\ker(\varphi)$ ist kein Hauptideal von $\mathbb{Z}[X]$.

Aufgabe 41 (*2 Punkte*)
Sei A ein Ring und X eine nichtleere Menge. Sei A^X die Menge aller Abbildungen von X nach A.

(i) Zeigen Sie, dass A^X mit der Verknüpfungen
$$(f+g)(x) := f(x) + g(x) \quad \text{und} \quad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$
ein Ring ist
(ii) Sei $Y \subset X$. Zeigen Sie, dass
$$\{f \in A^X : \forall y \in Y \ f(y) = 0\}$$
ein Ideal ist.

Aufgabe 42 (*2 Punkte*)
Berechnen Sie eine Smith Normalform (über $\mathbb{Z}$) der folgende Matrix:
$$A = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 43 (*4 Punkte*)
Seien $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2, x_4 = 3$ und $a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 6, a_4 = 11$. Finden Sie ein Polynom $P(X) \in \mathbb{Q}[X]$ vom Grad < 4 mit $P(x_i) = a_i$ für alle $i = 1, \ldots, 4$.
Hinweis: Verwenden Sie den chinesischen Restsatz.

Abgabe: Bis Freitag, den 5.7.2019, 9:45 Uhr, in die Briefkästen auf F4.

Webseite: `http://math.uni-konstanz.de/~serra/2019-SS-LinAlg2` und ILIAS