Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
S. Burgdorf, M. Serra
Sommersemester 2019

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Blatt 3

Thema der Präsenzaufgabe
Jordan'sche Normalform

Aufgabe 8 *(4 Punkte)*

(a) Bestimmen Sie eine reguläre Matrix S, so dass für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

die Matrix $J := S^{-1}AS$ in Jordan'scher Normalform ist. Geben Sie J an.

(b) Berechnen Sie A^{30} per Hand.

Hinweis: Der binomische Lehrsatz liefert $(A+B)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$ für alle Matrizen $A, B \in M_r(K)$, $r \in \mathbb{N}$, mit $AB = BA$.

Aufgabe 9 *(4 Punkte)*

Seien K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathrm{M}_n(K)$ eine *trigonalisierbare* Matrix. Sei $\chi_A(X)$ das charakteristische Polynom von A. Zeigen Sie ohne Verwendung des Satzes von Cayley-Hamilton, dass $\chi_A(A) = 0$ gilt.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst $\chi_A(A) = 0$ für den Fall, dass A in Jordan'scher Normalform ist.

Aufgabe 10* *(4 Punkte)*

Seien K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathrm{M}_n(K)$. Ein Polynom $p \in K[X]$ heißt *normiert*, wenn $p \neq 0$ und $p(X) = X^k + \sum_{i=0}^{k-1} a_i X^i$ für ein $k \geq 1$ und $a_i \in K$ gilt.

(i) Zeigen Sie, dass es ein eindeutig bestimmtes normiertes Polynom $\mu_A(X)$ von minimalem Grad gibt mit $\mu_A(A) = 0$. Das Polynom μ_A heißt *Minimalpolynom* von A.

(ii) Sei χ_A das charakteristische Polynom von A. Zeigen Sie, dass μ_A ein Teiler von χ_A ist, d.h. es gibt ein $g \in K[X]$ mit $\chi_A = \mu_A \cdot g$.

Abgabe: Bis Freitag, den 3.5.2019, 9:45 Uhr, in die Briefkästen auf F4.

Webseite: `http://math.uni-konstanz.de/~serra/2019-SS-LinAlg2` und ILIAS