Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
S. Burgdorf, M. Serra
Sommersemester 2019

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Blatt 4

Thema der Präsenzaufgabe
Komplexe Zahlen und komplexe Vektorräume

Aufgabe 11* *(4 Punkte)*
Sei $k \in \mathbb{N}$ uns seien $a_0, \ldots, a_{k-1} \in K$. Geben Sie das charaktersitische Polynom der folgenden Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & a_{k-1} \end{pmatrix}$$

an und beweisen Sie Ihre Behauptung für alle $k \geq 1$.

Aufgabe 12 *(4 Punkte)*
Sei S der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller stetigen Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Definiere

$$\langle\ ,\ \rangle : S \times S \longrightarrow \mathbb{R},\ \langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx.$$

(i) Zeigen Sie, dass $\langle\ ,\ \rangle$ ein Skalarprodukt ist.
(ii) Seien $m, n \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass die Funktionen $x \mapsto \sin(mx)$ und $x \mapsto \cos(nx)$ bezüglich dieses Skalarproduktes orthogonal sind, d.h. es gilt $\langle \sin(mx), \cos(nx) \rangle = 0$.
(iii) Sind $\sin(mx)$ und $\cos(nx)$ *orthonormal*? D.h.: gilt $\langle \sin(mx), \sin(mx) \rangle = \langle \cos(nx), \cos(nx) \rangle = 1$?

Aufgabe 13 *(4 Punkte)*
Für beliebige $x = (x_1, x_2)^T, y = (y_1, y_2)^T \in \mathbb{R}^2$, definiere die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ (x, y) &\longmapsto \langle x, y \rangle' := x_1y_1 - x_2y_1 - x_1y_2 + 4x_2y_2. \end{aligned}$$

(i) Zeigen Sie, dass die obige Abbildung ein Skalarprodukt ist.
(ii) Seien $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Vektoren $(x_1, x_2)^T$, $(-x_2, x_1)^T$ orthogonal bezüglich des Standard-Skalarprodukts auf $\mathbb{R}^2$ sind. Sind sie ebenfalls orthogonal bezüglich $\langle\ ,\ \rangle'$?
(iii) Finden Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung für x_1 und x_2, so dass $(x_1, x_2)^T$ und $(-x_2, x_1)^T$ orthogonal bezüglich $\langle\ ,\ \rangle'$ sind.

Abgabe: Bis Freitag, den 10.5.2019, 9:45 Uhr, in die Briefkästen auf F4.

Webseite: `http://math.uni-konstanz.de/~serra/2019-SS-LinAlg2` und ILIAS