Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
S. Burgdorf, M. Serra
Sommersemester 2019

Universität Konstanz

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Blatt 5

Thema der Präsenzaufgabe

Orthogonalität

Aufgabe 14 *(4 Punkte)*

Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum. Zwei Basen B, C von V heißen *gleich orientiert*, falls ihre Basiswechselmatrix $M(\mathrm{id}, B, C)$ positive Determinante hat. Zeigen Sie:

(i) Gleiche Orientierung ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Basen von V und es gibt genau zwei Äquivalenzklassen. Diese heißen *Orientierungen* von V.

(ii) Sei nun V euklidisch mit $\dim(V) = 3$. Die Orientierung der kanonischen Basis heißt *positiv*, die andere Orientierung heißt *negativ*.
Zeigen Sie, dass es eine eindeutige bilineare Abbildung $\times\colon V \times V \to V,\ (v, w) \mapsto v \times w$ gibt mit
   (a) für alle $v \in V$ gilt $v \times v = 0$;
   (b) für jede positiv-orientierte Orthonormalbasis (v_1, v_2, v_3) von V gilt $v_1 \times v_2 = v_3$.

(iii) Ist $\times$ symmetrisch?

Aufgabe 15 *(4 Punkte)*

Sei $V = \mathbb{R}[X]$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle := \int_{-a}^{a} f(t)g(t)\,dt$$

wobei $a \in \mathbb{R},\ a > 0$ ist. Sei V_3 der Unterraum der Polynomen von Grad ≤ 3. Seine Standardbasis ist $\{1, X, X^2, X^3\}$. Finden Sie eine Orthonormalbasis von V_3.

Aufgabe 16* *(4 Punkte)*

Wir definieren der *Folgenraum*

$$\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}) = \left\{ (a_0, a_1, a_2, \ldots) = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} : \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^2 < 0,\ a_n \in \mathbb{C} \right\}.$$

Seine Elementen sind Folgen komplexer Zahlen indiziert durch die natürlichen Zahlen. Die Menge $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ ist mit der punktweisen Addition und Skalarmultiplikation ein $\mathbb{C}$-Vektorraum (vgl. Beispiel 2.2.3 (v)). Auf $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ definieren wir folgendes Skalarprodukt

$$\langle (a_n), (b_n)\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \bar{b}_n.$$

(i) Für alle $i \in \mathbb{N}$ sei $e_i = (\delta^i_j)_{j\in\mathbb{N}}$ und sei $S = \{e_0, e_1, e_2, \ldots\}$. Zeigen Sie, dass $S^{\perp\perp} \neq S$ gilt.

(ii) Sei nun $f\colon \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}) \to \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ der *Rechtsshiftoperator*, definiert durch

$$f((a_0, a_1, a_2, \ldots)) = (0, a_0, a_1, \ldots).$$

Zeigen Sie, dass f orthogonal, injektiv aber nicht surjektiv ist.

Abgabe: Bis Freitag, den 17.5.2019, 9:45 Uhr, in die Briefkästen auf F4.

Webseite: `http://math.uni-konstanz.de/~serra/2019-SS-LinAlg2` und ILIAS