Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
S. Burgdorf, M. Serra
Sommersemester 2019

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Blatt 6

Thema der Präsenzaufgabe

Orthogonale oder adjungierte Endomorphismen

Aufgabe 17 *(2 Punkte)*

Seien V, W, U euklidische (bzw. unitäre) Vektorräume und seien $f, f_1, f_2 \colon V \to W$ und $g \colon W \to U$ lineare Abbildungen. Zeigen Sie die folgende Gleichheiten:

(i) $(f_1 + f_2)^* = f_1^* + f_2^*$; $(\lambda f)^* = \bar{\lambda} f^*$ für $\lambda \in \mathbb{K}$;
(ii) $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$;
(iii) $(f^*)^* = f$;
(iv) Falls $V = W$ ist, gilt $\mathrm{id}_V^* = \mathrm{id}_V$.

Aufgabe 18* *(4 Punkte)*

Sei $A \in M_n(\mathbb{C})$ so, dass A nur reelle Eigenwerte besitzt. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(i) A is selbstadjungiert;
(ii) es existiert eine Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^n$, die aus Eigenvektoren von A besteht;

Aufgabe 19 *(4+**2** Punkte)*

(i) Überprüfen Sie, dass die folgende Matrix orthogonal ist:

$$A = \frac{1}{90} \begin{pmatrix} 66 & -18\sqrt{6} & 10\sqrt{18} \\ 6\sqrt{6} & 72 & 15\sqrt{12} \\ -14\sqrt{18} & -9\sqrt{12} & 60 \end{pmatrix}$$

(ii) Bestimmen Sie eine unitäre Matrix T, so dass $T^* A T \in \mathrm{M}_3(\mathbb{C})$ Diagonalgestalt hat.
(iii) Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix S, so dass $S^T A S \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ die Kästchenform aus Theorem 8.4.6 besitzt.

Zusatz: Bestimmen Sie alle möglichen Kästchenformen einer allgemeinen Matrix aus SO(3).

Aufgabe 20 *(4 Punkte)*

Sei V ein euklidischer oder unitärer Raum und seien $v_1, \ldots, v_n$ Vektoren aus V. Definiere die *Gramsche Matrix* G der Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ durch $G = (G_{ij})$ mit $G_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$ für $1 \leq i, j \leq n$. Zeigen Sie:

(i) Die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ sind genau dann linear unabhängig, wenn $\det(G) \neq 0$ ist.
(ii) G ist positiv semidefinit.

Abgabe: Bis Freitag, den 24.5.2019, 9:45 Uhr, in die Briefkästen auf F4.

Webseite: `http://math.uni-konstanz.de/~serra/2019-SS-LinAlg2` und ILIAS