Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
S. Burgdorf, M. Serra
Sommersemester 2019

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Blatt 7

Thema der Präsenzaufgabe
normale Endomorphismen

Aufgabe 21* *(4 Punkte)*

Sei V ein euklidischer Raum und $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus. Für $a \in V$ definieren wir die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} a^*\colon & V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & v & \longmapsto & \langle v, a\rangle. \end{array}$$

(i) Zeigen Sie, dass $a^* \in V^*$ ist, wobei V^* den Dualraum von V bezeichnet.

(ii) Wir definieren nun die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \Xi\colon & V & \longrightarrow & V^* \\ & a & \longmapsto & a^*. \end{array}$$

Zeigen Sie, dass Ξ ein bijektiver Homomorphismus von Vektorräumen ist.

(iii) Wir definieren $\varphi \in V^*$ durch $\varphi(v) := \langle f(v), a\rangle$ für festes $a \in V$. Zeigen Sie, dass es ein eindeutig bestimmtes $a_0 \in V$ mit $\varphi = a_0^*$ gibt.

(iv) Zeigen Sie, dass die zu f adjungierte Abbildung $f^* \in \mathrm{End}(V)$ durch $a \mapsto a_0$ $(a \in V)$ gegeben ist.

Aufgabe 22 *(2 Punkte)*

Seien V ein unitärer Raum und sei $f \in \mathrm{End}(V)$.

(i) Zeigen Sie, dass f genau dann normal ist, wenn $\|f(v)\| = \|f^*(v)\|$ für alle $v \in V$ gilt.

(ii) Sei nun f normal und $\lambda \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie:
   (a) $\ker(f) = \ker(f^*)$ und $V = \ker(f) \oplus \mathrm{im}(f)$;
   (b) $g := f - \lambda\,\mathrm{id}_V$ ist ebenfalls normal mit $g^* = f^* - \overline{\lambda}\,\mathrm{id}_V$.
   (c) $\forall n \in \mathbb{N} : \mathrm{rang}(f) = \mathrm{rang}(f^n)$.

Aufgabe 23 *(2 Punkte)*

(i) Zeigen Sie, dass die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

positiv semidefinit ist und berechnen Sie $\sqrt{A}$.

(ii) Berechnen Sie eine Polarzerlegung für die Matrix $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 24 *(4 Punkte)*

Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass alle Matrizen der Form

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_0 & a_{n-1} & & a_2 \\ a_2 & a_1 & a_0 & & a_3 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_0 \end{pmatrix},$$

mit $a_i \in \mathbb{C}$ für $i = 0, \ldots, n$, normal sind und paarweise kommutieren. Finden Sie eine invertierbare Matrix $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, so dass $S^{-1}AS$ für jede Wahl der $a_i \in \mathbb{C}$ Diagonalgestalt hat.
Hinweis: Die Nullstellen von $X^n - 1$ sind die n-ten Einheitswurzeln $e^{\frac{2\pi i k}{n}}$ mit $k = 0, \ldots, n-1$.

Abgabe: Bis Freitag, den 31.5.2019, 9:45 Uhr, in die Briefkästen auf F4.

Webseite: `http://math.uni-konstanz.de/~serra/2019-SS-LinAlg2` und ILIAS