Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
S. Burgdorf, M. Serra
Sommersemester 2019

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Blatt 8

Thema der Präsenzaufgabe
Polarzerlegung und normale Matrizen

Aufgabe 25 *(4 Punkte)*

Sei K ein beliebiger Körper und V ein K-Vektorraum mit Basis $\underline{v} = (v_1, \dots, v_n)$. Seien $\ell_1, \dots, \ell_n \in V^*$. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) $\ell_1, \dots, \ell_n$ sind linear unabhängig.

(ii) Die lineare Abbildung $V \to K^n,\ x \mapsto \begin{pmatrix} \ell_1(x) \\ \vdots \\ \ell_n(x) \end{pmatrix}$ ist surjektiv.

(iii) Die Vektoren
$$\begin{pmatrix} \ell_1(v_1) \\ \vdots \\ \ell_1(v_n) \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \ell_n(v_1) \\ \vdots \\ \ell_n(v_n) \end{pmatrix}$$
sind linear unabhängig in K^n.

Aufgabe 26 *(4 Punkte)*

Für jede Matrix $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ ist die Operatornorm $\|A\|$ von A definiert als
$$\|A\| := \sup\{\|Ax\| \colon x \in \mathbb{C}^n,\ \|x\| = 1\}.$$
Sei weiter
$$\rho(A) := \max\{|\lambda| \colon \lambda \in \mathbb{C},\ \lambda \text{ ist Eigenwert von } A\}$$
der *Spektralradius* von A. Zeige $\|A\| \geq \rho(A)$, sowie Gleichheit falls A normal ist.

Aufgabe 27 *(4 Punkte)*

Berechnen Sie verallgemeinerte Cholesky-Zerlegungen der reellen Matrizen
$$A := \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C := \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Abgabe: Bis Freitag, den 7.6.2019, 9:45 Uhr, in die Briefkästen auf F4.

Webseite: `http://math.uni-konstanz.de/~serra/2019-SS-LinAlg2` und ILIAS