Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
S. Burgdorf, M. Serra
Sommersemester 2019

## Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

### Blatt 9

**Thema der Präsenzaufgabe**

Sylvester-Signatur und positiv semidefinite Matrizen

**Aufgabe 28*** *(4 Punkte)*

Sei $A \in \mathrm{M}_n(K)$ für ein $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ mit charakteristischem Polynom $\chi_A(X)$. Zeigen Sie, dass sich die Koeffizienten $a_0, \dots, a_{n-1} \in K$ von $\chi_A(-X) = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$ durch

$$a_i = \sum_{\substack{I \subseteq \{1,\dots,n\} \\ |I|=n-i}} \det(A_I)$$

für $i \in \{0, \dots, n-1\}$ berechnen lassen.

*Hinweis:* Verallgemeinern Sie zunächst folgende Determinantengleichung

$$\det \begin{pmatrix} a & b+e \\ c & d+f \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a & e \\ c & f \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 29** *(2 Punkte)*

Die *Fakultät* $n!$ einer Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist definiert durch $n! := \prod_{i=1}^{n} i$. Der *Binomialkoeffizient* $\binom{x}{k}$ ist für $x \in \mathbb{C}$ und $k \in \mathbb{N}$ definiert durch

$$\binom{x}{k} := \prod_{i=1}^{k} \frac{x-i+1}{i} = \frac{1}{k!} \prod_{i=1}^{k} (x-i+1).$$

Zeigen Sie

$$\sum_{j=0}^{k} (i!) \binom{i}{j} (k!) \binom{k}{j} = (i+k)!$$

für alle $i, k \in \mathbb{N}$.

**Aufgabe 30** *(2 Punkte)*

Betrachte für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Matrix

$$A_n := \begin{pmatrix} 0! & 1! & 2! & \cdots & n! \\ 1! & 2! & \cdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ n! & (n+1)! & \cdots & \cdots & (2n)! \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}.$$

(i) Berechnen Sie per Hand eine verallgemeinerte Cholesky-Zerlegung von $A_2$ und $A_3$.

(ii) Zeigen Sie per Induktion, dass $A_n$ eine verallgemeinerte Cholesky-Zerlegung $(\mathbf{1}, S_n, D_n)$ mit

$$D_n = \mathrm{diag}(0!^2, 1!^2, 2!^2, \dots, n!^2)$$

und

$$(S_n)_{ij} = \frac{i!^2}{j!^2 (i-j)!}$$

für $i, j \in \{0, \dots, n\}$ besitzt.

-bitte wenden-

**Aufgabe 31** *(4 Punkte)*

Wir betrachten die formale Ableitungen $D\colon \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X],\ p \mapsto p'$.

(a) Begründen Sie, warum die Summe aller Ableitungen

$$Ep := p + p' + p'' + p''' + \dots$$

eines Polynoms $p \in \mathbb{R}[X]$ wohldefiniert ist. Zeigen Sie, dass die Abbildung $E\colon \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ ein Homomorphismus ist.

(b) Sei $\mathbb{R}[X]_n = \{p \in \mathbb{R}[X]\colon \deg(p) \leq n\}$ für $n \in \mathbb{N}$ der Vektorraum der Polynome mit Grad $\leq n$. Bestimmen Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Darstellungsmatrix $A_n$ der quadratischen Form

$$\mathbb{R}[X]_n \to \mathbb{R},\ p \mapsto E(p^2)(0)$$

bezüglich der Basis $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ von $\mathbb{R}[X]_n$.

(c) Zeigen Sie, dass $A_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ positiv definit ist.

(d) Zeigen Sie, dass für jedes Polynom $p \in \mathbb{R}[X]$ die Summe aller Ableitungen von $p^2$ ein Polynom ist, welches auf der ganzen reellen Achse positiv ist.

**Abgabe:** Bis Freitag, den 14.6.2019, 9:45 Uhr, in die Briefkästen auf F4.

**Webseite:** `http://math.uni-konstanz.de/~serra/2019-SS-LinAlg2` und ILIAS

**Ankündigung:** Die Tutoren und Tutorinnen der Linearen Algebra und der Analysis fordern die Studierenden zum sportlichen Wettkamp! Gekickt wird am 13. Juni um 17 Uhr am Sportgelände Egg. Die Studierenden tragen dunkel, die Tutoren kommen in weiß. Siegesfeier gibt es dann beim gemütlichen Grillen im Anschluss. Fragen bitte an dennis.zisselsberger@uni-konstanz.de