Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Reinhard Racke
Dipl.-Math. Olaf Weinmann

2. Juli 2007

Analysis II
12. Übungsblatt

Aufgabe 12.1 Zeigen Sie, dass es keinen Homöomorphismus $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow [0,1]\times[0,1]$ gibt.
Hinweis: Argumentieren Sie mit Wegzusammenhang.

Aufgabe 12.2 Gegeben sei die Kugel $K := \{v \in \mathbb{R}^3 : |v| \le 1\}$.

(*i*) Finden Sie eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $z_n \in (-1,1)$ $(n \in \mathbb{N})$ und $z_n \neq z_m$ $(n \neq m)$, so dass

$$K \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = z_n\}$$

quadrierbar ist.

(*ii*) Finden Sie eine Folge $(z'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass

$$K \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = z'_n\}$$

nicht quadrierbar ist.

Aufgabe 12.3 Führen Sie im $\mathbb{R}^3$ Kugelkoordinaten, also den Radius r als Abstand vom Nullpunkt, den Winkel φ in der x-y-Ebene und den Winkel θ als Winkel zur z-Achse, ein.

1. (a) Wie lassen sich die Koordinaten x, y, z durch die Kugelkoordinaten ausdrücken?
   (b) In welchem Bereich variieren letztere?
   (c) Wie lautet in diesem Zusammenhang die Transformationsformel?
2. Es sei $R > 0$ gegeben. Die Halbkugel $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le R^2, z \ge 0\}$ sei mit einer Masse angefüllt, deren Dichte in einem Punkt $(x,y,z) \in B$ proportional zum Abstand dieses Punktes von der Grundfläche ist, d.h. $\rho(x,y,z) = az$, wobei $a > 0$. Berechnen Sie die Gesamtmasse M dieser Halbkugel als Integral der Massendichte ρ über die Halbkugel.

Aufgabe 12.4 Berechnen Sie $\int_\Gamma \langle v(t), \mathrm{d}x\rangle$ für

1. $\Gamma\colon t \longrightarrow (\cos(t), \sin(t)),\ t \in [0, 2\pi],\ v(x,y) = (x^2+y, 2xy)$,
2. $\Gamma\colon t \longmapsto (2t, -t, t^2),\ t \in [0,1],\ v(x,y,z) = (3x+y, 2y, 2z+y-x)$.

Abgabetermin: Montag 9. Juli 2007, vor der Vorlesung in die Briefkästen bei F411.