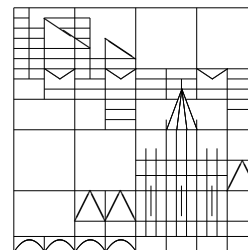


2. Juli 2007



## Analysis II 12. Übungsblatt

**Aufgabe 12.1** Zeigen Sie, dass es keinen Homöomorphismus  $\gamma: [0, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$  gibt.  
HINWEIS: Argumentieren Sie mit Wegzusammenhang.

**Aufgabe 12.2** Gegeben sei die Kugel  $K := \{v \in \mathbb{R}^3 : |v| \leq 1\}$ .

(i) Finden Sie eine Folge  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $z_n \in (-1, 1)$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) und  $z_n \neq z_m$  ( $n \neq m$ ), so dass

$$K \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = z_n\}$$

quadrierbar ist.

(ii) Finden Sie eine Folge  $(z'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , so dass

$$K \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = z'_n\}$$

nicht quadrierbar ist.

**Aufgabe 12.3** Führen Sie im  $\mathbb{R}^3$  Kugelkoordinaten, also den Radius  $r$  als Abstand vom Nullpunkt, den Winkel  $\varphi$  in der  $x$ - $y$ -Ebene und den Winkel  $\theta$  als Winkel zur  $z$ -Achse, ein.

- (a) Wie lassen sich die Koordinaten  $x, y, z$  durch die Kugelkoordinaten ausdrücken?  
(b) In welchem Bereich variieren letztere?  
(c) Wie lautet in diesem Zusammenhang die Transformationsformel?
- Es sei  $R > 0$  gegeben. Die Halbkugel  $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0\}$  sei mit einer Masse angefüllt, deren Dichte in einem Punkt  $(x, y, z) \in B$  proportional zum Abstand dieses Punktes von der Grundfläche ist, d.h.  $\rho(x, y, z) = az$ , wobei  $a > 0$ . Berechnen Sie die Gesamtmasse  $M$  dieser Halbkugel als Integral der Massendichte  $\rho$  über die Halbkugel.

**Aufgabe 12.4** Berechnen Sie  $\int_{\Gamma} \langle v(t), dx \rangle$  für

- $\Gamma: t \rightarrow (\cos(t), \sin(t)), t \in [0, 2\pi], v(x, y) = (x^2 + y, 2xy),$
- $\Gamma: t \mapsto (2t, -t, t^2), t \in [0, 1], v(x, y, z) = (3x + y, 2y, 2z + y - x).$