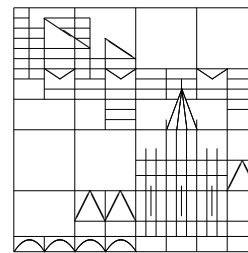


09. Juli 2007



Analysis II

13. Übungsblatt

Aufgabe 13.1 Es sei $\Delta_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0, x + y \leq 1\}$ gegeben. Die Abbildung $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ sei für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ durch

$$A(x, y) := (x + y, y)$$

definiert. Zeigen Sie:

(i) Für stetige Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$\int_{\Delta_1} f(x + y) d(x, y) = \int_{A(\Delta_1)} f(s) d(s, t) = \int_0^1 f(s) s ds.$$

(ii) Berechnen Sie

$$\int_{\Delta_1} (x + y)^2 e^{(x+y)^2} d(x, y).$$

Aufgabe 13.2 Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und v ein konservatives Vektorfeld auf U , d.h. $\langle v(x), dx \rangle$ ist exakt. Weiter sei γ ein in U verlaufender Weg, der die Bedingung

$$\gamma''(t) = v(\gamma(t))$$

erfüllt. Zeigen Sie, dass

$$\frac{1}{2} \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle \Big|_{t_1}^{t_2} = f(\gamma(t_2)) - f(\gamma(t_1))$$

gilt, wobei $\nabla f = v$ ist.

Aufgabe 13.3 Gegeben sei das Ellipsoid $G := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} < 1\}$ und das Vektorfeld $V: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $V(x, y, z) = (3x^2z, y^2 - 2x, z^3)$. Berechnen Sie das Oberflächenintegral

$$\int_{\partial G} \langle V, \vec{n} \rangle dA.$$

Aufgabe 13.4 Gegeben sei die Fläche $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 - y^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$ und das Vektorfeld $V: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $V(x, y, z) = (y, z, x)$. Berechnen Sie das Randflächenintegral

$$\int_{\partial M} \langle V, \vec{t} \rangle ds.$$

Definition 13.5 Für eine Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definieren wir den **Träger** von f durch

$$\text{supp}(f) := \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}}.$$

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Die Menge $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ der **Testfunktionen** auf Ω ist definiert durch:

$$\mathcal{C}_0^\infty(\Omega) := \{f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) : \Omega \supset \text{supp}(f) \text{ kompakt}\}.$$

Aufgabe 13.6 Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein Gebiet mit $0 \notin \Omega$. Ferner sei $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$. Zeigen Sie

$$\int_{\Omega} \frac{1}{|x|} \Delta \varphi(x) dx = 0.$$