Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Reinhard Racke
Dipl.-Math. Olaf Weinmann

09. Juli 2007

Analysis II
13. Übungsblatt

Aufgabe 13.1 Es sei $\Delta_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x,y \geq 0, x+y \leq 1\}$ gegeben. Die Abbildung $A\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ sei für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ durch

$$A(x,y) := (x+y, y)$$

definiert. Zeigen Sie:

(i) Für stetige Funktionen $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$\int_{\Delta_1} f(x+y)\mathrm{d}(x,y) = \int_{A(\Delta_1)} f(s)\mathrm{d}(s,t) = \int_0^1 f(s)s\mathrm{d}s.$$

(ii) Berechnen Sie

$$\int_{\Delta_1} (x+y)^2 e^{(x+y)^2}\mathrm{d}(x,y).$$

Aufgabe 13.2 Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und v ein konservatives Vektorfeld auf U, d.h. $\langle v(x), \mathrm{d}x\rangle$ ist exakt. Weiter sei γ ein in U verlaufender Weg, der die Bedingung

$$\gamma''(t) = v(\gamma(t))$$

erfüllt. Zeigen Sie, dass

$$\frac{1}{2}\left\langle \gamma'(t), \gamma'(t)\right\rangle\Big|_{t_1}^{t_2} = f(\gamma(t_2)) - f(\gamma(t_1))$$

gilt, wobei $\nabla f = v$ ist.

Aufgabe 13.3 Gegeben sei das Ellipsoid $G := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} < 1\}$ und das Vektorfeld $V\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mit $V(x,y,z) = (3x^2z, y^2 - 2x, z^3)$. Berechnen Sie das Oberflächenintegral

$$\int_{\partial G} \langle V, \vec{n}\rangle \,\mathrm{d}A.$$

Aufgabe 13.4 Gegeben sei die Fläche $M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 - y^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$ und das Vektorfeld $V\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mit $V(x,y,z) = (y,z,x)$. Berechnen Sie das Randflächenintegral

$$\int_{\partial M} \langle V, \vec{t}\rangle \,\mathrm{d}s.$$

Definition 13.5 *Für eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definieren wir den* ***Träger*** *von f durch*

$$\operatorname{supp}(f) := \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}}.$$

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Die Menge $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ der ***Testfunktionen*** *auf Ω ist definiert durch:*

$$\mathcal{C}_0^\infty(\Omega) := \{f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) : \Omega \supset \operatorname{supp}(f) \textit{ kompakt}\}.$$

Aufgabe 13.6 Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein Gebiet mit $0 \notin \Omega$. Ferner sei $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$. Zeigen Sie

$$\int_\Omega \frac{1}{|x|} \Delta\varphi(x) \mathrm{d}x = 0.$$