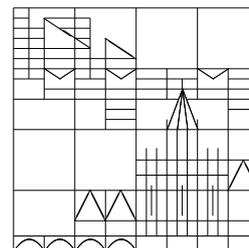


23. April 2007



## Analysis II 2. Übungsblatt

**Aufgabe 2.1** Die Funktion  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  sei für  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  durch

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{für } x^2 + y^2 > 0 \\ 0 & \text{für } x = y = 0 \end{cases}$$

definiert. Zeigen Sie:

- (i)  $f$  ist in jedem Punkt  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  stetig.
- (ii)  $f$  ist im Punkt  $(x_0, y_0) = (0, 0)$  partiell stetig.
- (iii)  $f$  ist im Punkt  $(x_0, y_0) = (0, 0)$  nicht stetig.

**Aufgabe 2.2** Es seien  $(X, d_X)$  und  $(Y, d_Y)$  metrische Räume und  $f: X \rightarrow Y$  eine Abbildung. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (i)  $f$  ist stetig.
- (ii) Für jede offene Menge  $U \subset Y$  ist  $f^{-1}(U) \subset X$  offen.
- (iii) Für jede abgeschlossene Menge  $A \subset Y$  ist  $f^{-1}(A) \subset X$  abgeschlossen.

**Aufgabe 2.3** Es sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Zeigen Sie: Ist  $X$  wegzusammenhängend, so ist  $X$  zusammenhängend.

**Aufgabe 2.4** Wir versehen die Menge

$$X := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1, y = \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right\} \cup \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < y < 1\}$$

mit der euklidischen Metrik des  $\mathbb{R}^2$ . Zeigen Sie, dass  $X$  zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend ist.