Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Reinhard Racke
Dipl.-Math. Olaf Weinmann

23. April 2007

Analysis II
2. Übungsblatt

Aufgabe 2.1 Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ sei für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{für} \quad x^2+y^2 > 0 \\ 0 & \text{für} \quad x = y = 0 \end{cases}$$

definiert. Zeigen Sie:

(i) f ist in jedem Punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ stetig.

(ii) f ist im Punkt $(x_0, y_0) = (0,0)$ partiell stetig.

(iii) f ist im Punkt $(x_0, y_0) = (0,0)$ nicht stetig.

Aufgabe 2.2 Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und $f\colon X \longrightarrow Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) f ist stetig.

(ii) Für jede offene Menge $U \subset Y$ ist $f^{-1}(U) \subset X$ offen.

(iii) Für jede abgeschlossene Menge $A \subset Y$ ist $f^{-1}(A) \subset X$ abgeschlossen.

Aufgabe 2.3 Es sei (X,d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie: Ist X wegzusammenhängend, so ist X zusammenhängend.

Aufgabe 2.4 Wir versehen die Menge

$$X := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1, y = \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right\} \cup \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < y < 1\}$$

mit der euklidischen Metrik des $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass X zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend ist.

Abgabetermin: Montag 30. April 2007, vor der Vorlesung in die Briefkästen bei F411.