Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Reinhard Racke
Dipl.-Math. Olaf Weinmann

14. Mai 2007

Analysis II
5. Übungsblatt

Aufgabe 5.1 Beschreiben Sie die Höhenlinien und Falllinien der folgenden Funktionen:

(i) $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + y^2$,

(ii) $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2$.

Aufgabe 5.2 Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{für} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für} \quad x = y = 0 \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die Funktion f in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ beliebig oft stetig differenzierbar und in $\mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar ist. Zeigen Sie weiter, dass f in $(0,0)$ zweimal partiell differenzierbar und dass $\partial_y \partial_x f(0,0) \neq \partial_x \partial_y f(0,0)$ gilt.

Aufgabe 5.3 Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Extrema:

(i) $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto (x+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$,

(ii) $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto x^4 + x^2 - y^2 + 2xy + 8x$.

Aufgabe 5.4 Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ konvex. Zeigen Sie, dass f stetig ist.

Hinweis: Zeigen Sie, dass für $a < u < v < w < b$

$$\frac{f(v)-f(u)}{v-u} \leq \frac{f(w)-f(u)}{w-u} \leq \frac{f(w)-f(v)}{w-v}$$

gilt. Zeigen Sie dann, dass für $a < \alpha < u$

$$\frac{f(v)-f(\alpha)}{v-\alpha} \leq \frac{f(v)-f(u)}{v-u} \leq \frac{f(w)-f(v)}{w-v}$$

gilt.

Abgabetermin: Montag 21. Mai 2007, vor der Vorlesung in die Briefkästen bei F411.