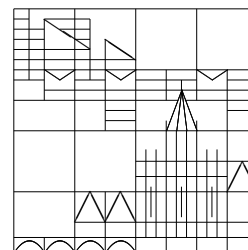


14. Mai 2007



Analysis II 5. Übungsblatt

Aufgabe 5.1 Beschreiben Sie die Höhenlinien und Falllinien der folgenden Funktionen:

- (i) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + y^2,$
- (ii) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = x^2.$

Aufgabe 5.2 Sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) := \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } x = y = 0 \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die Funktion f in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ beliebig oft stetig differenzierbar und in \mathbb{R}^2 stetig differenzierbar ist. Zeigen Sie weiter, dass f in $(0, 0)$ zweimal partiell differenzierbar und dass $\partial_y \partial_x f(0, 0) \neq \partial_x \partial_y f(0, 0)$ gilt.

Aufgabe 5.3 Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Extrema:

- (i) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto (x + y^2)e^{-(x^2 + y^2)},$
- (ii) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^4 + x^2 - y^2 + 2xy + 8x.$

Aufgabe 5.4 Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ konvex. Zeigen Sie, dass f stetig ist.

HINWEIS: Zeigen Sie, dass für $a < u < v < w < b$

$$\frac{f(v) - f(u)}{v - u} \leq \frac{f(w) - f(u)}{w - u} \leq \frac{f(w) - f(v)}{w - v}$$

gilt. Zeigen Sie dann, dass für $a < \alpha < u$

$$\frac{f(v) - f(\alpha)}{v - \alpha} \leq \frac{f(v) - f(u)}{v - u} \leq \frac{f(w) - f(v)}{w - v}$$

gilt.