Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Reinhard Racke
Dipl.-Math. Olaf Weinmann

21. Mai 2007

Analysis II
6. Übungsblatt

Aufgabe 6.1 Es sei Ω die Menge der bijektiven, linearen Abbildungen des $\mathbb{R}^n$ in sich. Zeigen Sie:

(i) Ist $A \in \Omega$, $\alpha := \|A^{-1}\|^{-1}$, so liegen alle $B \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ mit $\|B - A\| < \alpha$ in Ω.

(ii) $\Omega \subset L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ ist offen bezüglich der Operatornorm.

(iii) $F\colon \Omega \longrightarrow \Omega$, $A \longmapsto A^{-1}$ ist stetig.

Aufgabe 6.2 Untersuchen Sie, ob durch die Gleichungen

(a) $x - \sin y + u(u+1) = 0; \qquad -x^3 + 2e^y + u(u-2) = 2,$

(b) $x - \sin y + u(u+1) = 0; \qquad -x^3 + 2e^u + u(u-2) = 2$

in einer Umgebung von $u = 0$ zwei Funktionen $u \longmapsto x(u)$, $u \longmapsto y(u)$ mit $x(0) = y(0) = 0$ definiert werden.

Aufgabe 6.3 Gegeben sei die Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, welche für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ durch

$$f(x, y) = (\cos(x)\cosh(y), \sin(x)\sinh(y))$$

definiert ist. Untersuchen Sie f auf (lokale) Umkehrbarkeit.

Aufgabe 6.4 Es sei die für eine Erbschaft E zu entrichtende Steuer gegeben durch $S(E)$, wobei $S(E) > 0$ für $E > 0$, $S(0) = 0$ und $S'(E)$ streng monoton wächst auf $(0, \infty)$. Verteilen Sie ein Vermögen A so unter n Erben, dass die Gesamterbschaftssteuer minimiert wird.

Abgabetermin: Dienstag 29. Mai 2007, vor der Vorlesung in die Briefkästen bei F411.