Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Reinhard Racke
Dipl.-Math. Olaf Weinmann

28. Mai 2007

Analysis II
7. Übungsblatt

Aufgabe 7.1 Untersuchen Sie, ob die Folge $(\gamma_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Wegen, die durch

$$\gamma_k(t) := \begin{pmatrix} \cos(t) + \frac{1}{k}\cos(kt) \\ \sin(t) + \frac{1}{k}\sin(kt) \end{pmatrix} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

definiert ist, im $\mathcal{C}^0$-Sinne konvergiert und ob sie im $\mathcal{C}^1$-Sinne konvergiert. Welcher Weg kommt jeweils als Grenzwert γ in Frage? Berechnen Sie schließlich $L(\gamma_k)$ und $L(\gamma)$.

Aufgabe 7.2 Es sei $\gamma\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve. Der Krümmungskreis von γ im Punkt s_0 ist der Kreis mit Radius $\frac{1}{\kappa(s_0)}$, der im Punkt $\gamma(s_0)$ den gleichen Tangentenvektor wie γ selbst hat, wobei der Kreis und die Kurve γ auf derselben Seite des Tangentenvektors liegen ($\kappa(s_0)$ ist die Krümmung von γ in s_0). Bestimmen Sie die Kreisgleichung des (auf Bogenlänge bezogenen) Krümmungskreises, d.h. die Größen m, a, b und r der Gleichung

$$k(s) = m + r\cos\left(\frac{s-s_0}{r}\right)\cdot a + r\sin\left(\frac{s-s_0}{r}\right)\cdot b.$$

Zeigen Sie, dass die Vektoren a und b orthonormiert sind. Zeigen Sie dann, dass der Krümmungskreis die Kurve γ an der Stelle s_0 von zweiter Ordnung berührt.

Aufgabe 7.3 Die logarithmische Spirale kann als Bild der Kurve $\gamma\colon [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\gamma(t) := \begin{pmatrix} ae^{bt}\cos(t) \\ ae^{bt}\sin(t) \end{pmatrix}$$

beschrieben werden, wobei $b < 0 < a$ konstant sind. Bestimmen Sie Bogenlänge, Krümmung und Krümmungskreis für $\gamma(t)$. Hat die Kurve γ endliche Länge auf $[t_0,\infty)$ für $t_0 \geq 0$? Zeigen Sie, dass $\gamma(t)$ für $t \to \infty$ gegen 0 konvergiert, wobei sich die Kurve um den Ursprung herumwindet.

Abgabetermin: Montag 04. Juni 2007, vor der Vorlesung in die Briefkästen bei F411.