Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Reinhard Racke
Dipl.-Math. Olaf Weinmann

04. Juni 2007

Analysis II
8. Übungsblatt

Aufgabe 8.1 Eine stetig differenzierbare Abbildung $T\colon \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ heißt konform, wenn die Winkel zwischen beliebigen sich schneidenden glatten Wegen γ_1 und γ_2 nach der Transformation mit T erhalten bleiben, d.h. wenn für $\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2)$ gilt:

$$\frac{\langle \gamma_1'(t_1), \gamma_2'(t_2)\rangle}{|\gamma_1'(t_1)||\gamma_2'(t_2)|} = \frac{\langle (T\circ\gamma_1)'(t_1), (T\circ\gamma_2)'(t_2)\rangle}{|(T\circ\gamma_1)'(t_1)||(T\circ\gamma_2)'(t_2)|}$$

Zeigen Sie, dass

$$S\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad S(x,y) := \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2+y^2} \\ \frac{y}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

eine konforme Abbildung ist.

Aufgabe 8.2 Zwei Wege $\gamma_1\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ und $\gamma_2\colon [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ heißen äquivalent, wenn es eine stetige, bijektive und streng monoton wachsende Funktion $\varphi\colon [c,d] \longrightarrow [a,b]$ gibt mit $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \varphi$. Zeigen Sie, dass damit eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Wege erklärt ist.

Definition 8.3 *Sei $\Gamma = [\gamma]$ eine Kurve mit Parametrisierung $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Für eine Zerlegung $a = t_0 < t_1 < ... < t_k = b$ definiere*

$$\ell(z) := \sum_{j=1}^{k} |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})|.$$

*Γ heißt **rektifizierbar**, falls*

$$\sup\{\ell(Z) : Z \textit{ Zerlegung von } [a,b]\} < \infty$$

gilt.

Aufgabe 8.4 Gegeben sei der Weg $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$\gamma(s) := \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad s = 0 \\ \left(s, s^2 \cos\left(\left(\frac{\pi}{s^2}\right)\right)\right) & \text{falls} \quad s \in (0,1] \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass γ auf $[0,1]$ zwar differenzierbar, nicht aber stetig differenzierbar ist und dass die Kurve $\Gamma = [\gamma]$ nicht rektifizierbar ist.

Abgabetermin: Montag 11. Juni 2007, vor der Vorlesung in die Briefkästen bei F411.