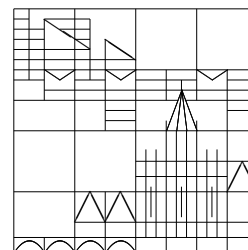


04. Juni 2007



Analysis II 8. Übungsblatt

Aufgabe 8.1 Eine stetig differenzierbare Abbildung $T: \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt konform, wenn die Winkel zwischen beliebigen sich schneidenden glatten Wegen γ_1 und γ_2 nach der Transformation mit T erhalten bleiben, d.h. wenn für $\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2)$ gilt:

$$\frac{\langle \gamma_1'(t_1), \gamma_2'(t_2) \rangle}{|\gamma_1'(t_1)| |\gamma_2'(t_2)|} = \frac{\langle (T \circ \gamma_1)'(t_1), (T \circ \gamma_2)'(t_2) \rangle}{|(T \circ \gamma_1)'(t_1)| |(T \circ \gamma_2)'(t_2)|}$$

Zeigen Sie, dass

$$S: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad S(x, y) := \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2+y^2} \\ \frac{y}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

eine konforme Abbildung ist.

Aufgabe 8.2 Zwei Wege $\gamma_1: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $\gamma_2: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißen äquivalent, wenn es eine stetige, bijektive und streng monoton wachsende Funktion $\varphi: [c, d] \rightarrow [a, b]$ gibt mit $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \varphi$. Zeigen Sie, dass damit eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Wege erklärt ist.

Definition 8.3 Sei $\Gamma = [\gamma]$ eine Kurve mit Parametrisierung $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Für eine Zerlegung $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ definiere

$$\ell(z) := \sum_{j=1}^k |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})|.$$

Γ heißt **rektifizierbar**, falls

$$\sup\{\ell(Z) : Z \text{ Zerlegung von } [a, b]\} < \infty$$

gilt.

Aufgabe 8.4 Gegeben sei der Weg $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$\gamma(s) := \begin{cases} 0 & \text{falls } s = 0 \\ (s, s^2 \cos(\frac{\pi}{s^2})) & \text{falls } s \in (0, 1] \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass γ auf $[0, 1]$ zwar differenzierbar, nicht aber stetig differenzierbar ist und dass die Kurve $\Gamma = [\gamma]$ nicht rektifizierbar ist.